

Lineare Optimierung

Prof. Dr. Christiane Tammer

Sommersemester 2021

In L^AT_EX gesetzt von Veronika Hille und Philipp Rösner

Hinweise:

- *Eventuell funktionieren die Links der Seitenverweise nicht richtig (?) aber die angezeigten Kapitelnummern und Seiten sind korrekt.*
- *Die Nummerierung ist hier durchgängig, d.h. Nummern von Lemmata oder Sätzen stimmen nicht unbedingt mit dem Originalscript überein. (Große Überschriften hingegen sind gleich nummeriert.)*
- *Die Scriptinhalte, insbesondere die Grafiken, sind visuell übernommen worden. Ihre Richtigkeit wird nicht garantiert.*

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung	4
1.1	Beispiele	4
1.1.1	Landwirtschaftlicher Betriebs-/Produktionsplan für die Viehhaltung	4
1.1.2	Bemerkungen	4
1.1.3	Transportproblem	6
1.1.4	Diskrete Tschebyscheff-Approximation	7
2	Das allgemeine lineare Optimierungsproblem (LOP)	9
2.0.1	Bemerkung	9
2.0.2	Bemerkung	10
2.0.3	Bemerkung	10
2.0.4	Bemerkung	10
2.0.5	Bemerkung: Ein LOP(2) ist äquivalent zu einem LOP(3) . . .	11
2.0.6	Bemerkung	11
2.1	Der zulässige Bereich	11
2.2	Eigenschaften von \mathcal{B}	12
2.2.1	Definition Konvexe Linearkombination	12
2.2.2	Definition	13
2.2.3	Definition	13
2.2.4	Bemerkung	13
2.3	Satz	14

2.3.1	Bemerkung	15
2.4	Definition	16
2.5	Übersicht	18
2.6	Konvexe (beschränkte) Polyeder (Polytop)	19
2.7	Satz	19
2.8	Das Optimierungsproblem	20
2.9	Definition (konvex/konkav)	21
2.10	Satz	21
2.11	Satz: Existenz der Lösung nicht gesichert	21
2.12	Satz	22
2.13	Satz	22
3	Die Simplexmethode (Dantzig)	24
3.1	Definition: Basislösung (BL)	25
3.2	Satz: Minimalpunkt - Minimalkriterium	26
3.2.1	Betrachtung der Fälle wie beim Eckenübergang:	27
3.2.2	Bemerkung	29
3.3	Iteration (Simplexalgorithmus)	30
3.4	Die Simplextableaus	31
3.5	Anfangstableau	33
3.6	Methode der Schein- (oder künstlichen) Variablen (2-Phasen-Methode)	33
3.6.1	Bemerkung	34
3.7	Praktische Durchführung	35
3.7.1	Bemerkung zu II:	36
3.8	Entartung	37
4	Lexikographische Simplexmethode (Methode der Lexikographischen Auswahl des Pivotelements)	38
4.1	Definition	39
4.1.1	Bemerkung	39
4.1.2	Bemerkung	39
4.2	Satz	39
4.3	Satz	40
4.4	Satz	40
4.5	Satz	40
4.5.1	Bemerkung	41
4.5.2	Bemerkung	41
4.6	Umkehrsatz zum Minimalkriterium ((•) S.26)	41
5	Dualitätstheorie	43
5.1	Satz: schwache Dualitätsaussage	44
5.1.1	Bemerkung: Skala für Q, G	45
5.2	Satz: starker Dualitätssatz	46
5.2.1	Bemerkung	48
5.3	Der Existenzsatz	48
5.3.1	Bemerkung	48
5.4	Beispiel	49
5.5	Satz: (Folgerung)	49
5.6	Einschließungssatz	50
5.6.1	Bemerkung	50

5.7	Praktische Verwendung der Dualitätsbeziehungen	50
5.8	Die Dualprogramme für die Typen (1), (2)	50
5.9	Satz von Farkas	52
5.9.1	Bemerkung	53
5.10	Satz	53
5.11	Satz: Lösbarkeit linearer Gleichungssysteme	54
5.12	Satz: Lösbarkeit linearer Ungleichungen	55
5.13	Satz: Nichtnegative Lösungen von lin. Gleichungen	55
5.14	Satz: Nichtnegative Lösungen von lin. Ungleichungen	56
5.14.1	Bemerkung	56
5.15	Satz	56
5.16	Satz	57
5.16.1	Folgerung: (A jetzt wieder beliebig)	58
6	Ökonomische Interpretation der Dualität	59
6.1	Produktionsplanungsmodell	59
7	Das Transportproblem	62
7.0.1	Bemerkung	63
7.1	Satz	63
7.1.1	Bemerkung	63
7.1.2	Bemerkung	64
7.2	Voruntersuchung für das Simplexverfahren beim Transportproblem .	65
7.3	Das Simplexverfahren beim Transportproblem	66
7.4	Beispiel zum Transportproblem	69
7.5	Bestimmung einer Anfangsbasislösung (Anfangseckpunkt) (Nordwest- eckenregel)	70
8	Spieltheorie (Matrixspiele)	72
8.0.1	Bemerkungen	75
9	Das Karmarkar-Verfahren	77
9.1	Das Karmarkar-Verfahren	77
9.1.1	Algorithmus	77
9.1.2	Motivation des Verfahrens	78
9.2	Lemma	79
9.3	Lemma	82
9.4	Zurückführung eines linearen Programms auf Karmarkar-Normalform	82
9.5	Satz	83
9.6	Satz	84

1 Einführung

1.1 Beispiele

1.1.1 Landwirtschaftlicher Betriebs-/Produktionsplan für die Viehhaltung

Input		Aktivitäten		Output
$x_1 \cdot 1 \text{ FE}$	\rightarrow	Rinder-		
$x_1 \cdot 150 \text{ AS}$	\rightarrow	Anzahl x_1	\rightarrow	$x_1 \cdot 250$ Gewinn
$x_2 \cdot 0.2 \text{ FE}$	\rightarrow	Schweine-		
$x_2 \cdot 25 \text{ AS}$	\rightarrow	Anzahl x_2	\rightarrow	$x_2 \cdot 45$ Gewinn

FE Futtereinheiten

AS Arbeitsstunden

1.1.2 Bemerkungen

a) Input und Output sind *proportional* zur Aktivitätsgröße.

b) Aktivitätsgröße $x_i \geq 0$, ganzzahlig.

c) *Additivität* der artgleichen Flüsse

$$\begin{array}{lcl}
 FE : x_1 \cdot 1 \text{ FE} & \rightarrow & \boxed{\begin{array}{l} x_1 \text{ Rinder} \\ x_2 \text{ Schweine} \end{array}} \\
 AS : x_2 \cdot 0.2 \text{ FE} & \rightarrow & \rightarrow \underbrace{250x_1 + 45x_2}_{\text{Gesamtgewinn } Q}
 \end{array}$$

d) *Restriktionen:*

$$\begin{array}{ll}
 x_1 \leq 50 & \text{Es gibt nur Ställe für 50 Rinder} \\
 x_2 \leq 200 &
 \end{array}$$

$$(\cdot) \quad \begin{array}{rcl}
 150x_1 + & 25x_2 & \leq 10000 \quad (\text{Es können nur 10000 AS geleistet werden}) \\
 x_1 + & 0.2x_2 & \leq 72 \quad (\text{Es gibt nur 72 FE})
 \end{array}$$

$$(*) \quad \quad \quad \Downarrow 72 \quad (\text{Es soll das gesamte Futter verbraucht werden})$$

LOP: $Q = 250x_1 + 45x_2$ (\rightarrow Max) unter *Restriktionen*

$$\left[\begin{array}{rcl}
 x_1 & & \leq 50 \\
 & x_2 & \leq 200 \\
 x_1 + & 0.2x_2 & \leq 72 \\
 150x_1 + & 25x_2 & \leq 10000 \\
 x_1 & & \geq 0 \\
 & x_2 & \geq 0
 \end{array} \right.$$

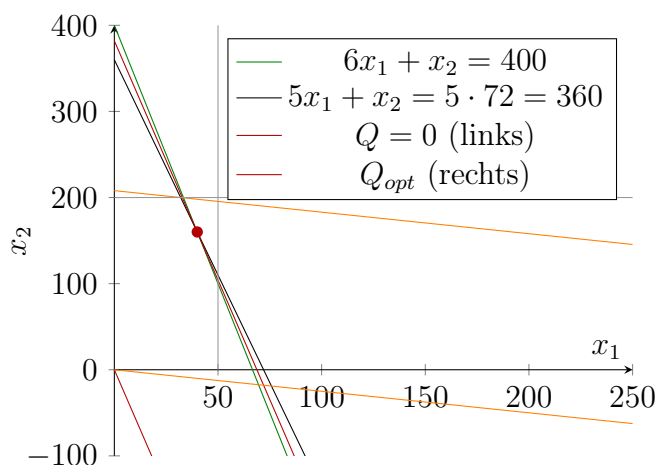
Jeder Vektor $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, der den 6 Restriktionen genügt, heißt ein *zulässiger Vektor* und liefert ein *zulässiges Programm* (D.h., solche $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ sind ein zulässiger Plan für die Viehhaltung).

Fordert man, wenn mehrere zulässige Programme ex.

$$Q = \text{Max!},$$

also das Programm zu finden mit $Q = \text{Max!}$, so hat man ein *Problem der linearen Optimierung* gestellt. (Das oder ein Programm, welches $Q = \text{Max!}$ liefert, heißt Optimallösung oder optimales Programm.)

- *Beispiel* für ein *zulässiges Programm* (\equiv für eine zulässige Lösung)
 - $x_1 = 50, \quad x_2 = 0 \quad \Rightarrow Q = 12500$
 - $x_1 = 0, \quad x_2 = 200 \quad \Rightarrow Q = 9000$
- geometrische Deutung der Aufgabe



$$((*) \cdot 5) : \quad g : \quad 5x_1 + x_2 = 5 \cdot 72 \quad (n : (5, 1))$$

$$x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = 360$$

$$x_1 = 50 \Rightarrow x_2 = 110$$

$$((\cdot) \cdot \frac{1}{25}) : \quad g : \quad 6x_1 + x_2 = 400 \quad (n : (6, 1))$$

$$x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = 400$$

$$x_1 = 50 \Rightarrow x_2 = 100$$

$$Q : \quad Q = 250x_1 + 45x_2 \quad (n : (250, 45))$$

$$Q = 0 \rightarrow x_2 = -x_1 \cdot \frac{250}{45} = -\frac{50}{9}x_1$$

Q wächst in n -Richtung

\rightarrow Verschiebung von $x_2 = -\frac{50}{9}x_1$, in n -Richtung so weit wie möglich: bis Schnitt

$$5x_1 + 200 = 360 \Rightarrow x_1 = \frac{160}{5} = 32$$

- *Optimallösung* (optimales Programm): $x_1 = 40, x_2 = 160$
- *Gesamtgewinn* bei diesem Programm:
 $Q = 250 \cdot 40 + 45 \cdot 160 = 10000 + 7200 = 17200$

Auch Aufgaben im \mathbb{R}^3 (3 Aktivitäten) können noch geometrisch leicht gedeutet werden.

1.1.3 Transportproblem

Transportmatrix: (Kosten pro Tonne eines Gutes)

von Firma \ nach Lager	A	B	C
I	25	17	18
II	25	18	14

Optimierungsproblem: In jedes Lager sollen 300t mit insgesamt *minimalen Kosten* gebracht werden.

Lineares Programmieren:

Inputs	Aktivitäten	Outputs
x_1 t aus I \rightarrow $x_1 \cdot 25$ Kosten \rightarrow	Transport von I nach A Menge: x_1	$\rightarrow x_1$ Tonnen in A
x_2 t aus I \rightarrow $x_2 \cdot 17$ Kosten \rightarrow	$I \rightarrow B$ x_2	$\rightarrow x_2$ Tonnen in B
	...6 Aktivitäten	

Gesamtprozess:

$x_1 + x_2 + x_3$ Menge des Gutes in I	\rightarrow	Transport	$\rightarrow x_1 + x_4 \stackrel{!}{=} 300$ in A
$x_4 + x_5 + x_6$ Menge in II	\rightarrow		$\rightarrow x_2 + x_5 \stackrel{!}{=} 300$ in B
$Q = 25x_1 + 17x_2 + 18x_3$ $+ 25x_4 + 18x_5 + 14x_6$ Gesamtkosten	\rightarrow		$\rightarrow x_3 + x_6 \stackrel{!}{=} 300$ in C

Restriktionen: (lin. !)

In I werden nur 350t zur Verfügung stehen: $x_1 + x_2 + x_3 \leq 350$

In II werden nur 650t zur Verfügung stehen: $x_4 + x_5 + x_6 \leq 650$

\Rightarrow LOP

$$\left[\begin{array}{rcl}
 Q = & 25x_1 & +17x_2 & +18x_3 & +25x_4 & +18x_5 & +14x_6 \\
 & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & \\
 & & & & x_4 & + & x_5 & + & x_6 \\
 & x_1 & & & + & x_4 & & & \\
 & & x_2 & & & + & x_5 & & \\
 & & & x_3 & & & + & x_6 & \\
 & x_1 \geq 0 & x_2 \geq 0 & x_3 \geq 0 & x_4 \geq 0 & x_5 \geq 0 & x_6 \geq 0 & &
 \end{array} \right. \begin{array}{l} \leq 350 \\ \leq 650 \\ = 300 \\ = 300 \\ = 300 \end{array}$$

gesucht: zulässiges, optimales Programm, welches die Gesamtkosten *minimiert*:

$Q = \text{Min!}$

Bemerkung: Was von I bzw. II nicht abtransportiert wird, bleibt dort im Lager:

Inputs	Aktivitäten	Outputs
x_7 t aus I \rightarrow	Lagerung in I	\rightarrow %
$x_7 \cdot 0$ Kosten \rightarrow	Menge: x_7	
x_8 t aus II \rightarrow	Lagerung in II	\rightarrow %
$x_8 \cdot 0$ Kosten \rightarrow	Menge: x_8	

Eingliederung in den Gesamtprozess

$$\begin{array}{rcl}
 (x_1 + x_2 + x_3 + x_7)t \text{ in } I & & \\
 (x_4 + x_5 + x_6 + x_8)t \text{ in } II & \rightarrow & \boxed{\text{Transport und Lagerung}} \\
 Q = \text{wie oben} & &
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 \nearrow x_1 + x_4 = 300 \\
 \rightarrow x_2 + x_5 = 300 \\
 \searrow x_3 + x_6 = 300
 \end{array}$$

\Rightarrow LOP

$$\left[\begin{array}{rcl}
 Q = & 25x_1 & +17x_2 & +18x_3 & +25x_4 & +18x_5 & +14x_6 & & = \text{Min} \\
 & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & +x_7 & = 350 \\
 & & & & x_4 & + & x_5 & + & x_6 & +x_8 & = 650 \\
 & x_1 & & & + & x_4 & & & & & = 300 \\
 & & x_2 & & & & + & x_5 & & & = 300 \\
 & & & x_3 & & & & + & x_6 & & = 300 \\
 x_1 \geq 0 & x_2 \geq 0 & x_3 \geq 0 & x_4 \geq 0 & x_5 \geq 0 & x_6 \geq 0 & x_7 \geq 0 & x_8 \geq 0 & & &
 \end{array} \right.$$

$x_7, x_8 \rightarrow$ Schlupfvariable

1.1.4 Diskrete Tschebyscheff-Approximation

$f(x)$ soll in $[a, b]$ durch eine Linearkombination von n gegebenen Funktionen n_1, n_2, \dots, n_n so *approximiert* werden, dass

$$\max_{x \in [a, b]} \left| f(x) - \sum_{\nu=1}^n a_{\nu} n_{\nu}(x) \right| = \min_{a_{\nu}}$$

Diskretisierung: Es werden nur *Stützstellen* x_1, \dots, x_k aus $[a, b]$ betrachtet:

$$\max_{j=1, \dots, k} \left| f(x_j) - \sum_{\nu=1}^n a_{\nu} n_{\nu}(x_j) \right| = \min_{a_{\nu}}$$

Gesucht ist also das *Minimum* der *maximalen Abweichung* an den Stützstellen bzgl. der Parameter a_1, \dots, a_n .

Umformulierung: $f(x_j) = f_j$, $n_{\nu}(x_j) = u_{\nu j}$

$$\begin{aligned}
 \min_{a_1, \dots, a_n} \max_j \left| f_j - \sum_{\nu=1}^n a_{\nu} n_{\nu j} \right| &= \min_{a_1, \dots, a_n} \min \left\{ a_0 \mid a_0 \geq \left| f_j - \sum_{\nu} a_{\nu} n_{\nu j} \right|, j = 1, \dots, k \right\} \\
 &= \min_{a_0, a_1, \dots, a_n} \left\{ a_0 \mid a_0 \geq \left| f_j - \sum_{\nu} a_{\nu} n_{\nu j} \right|, j = 1, \dots, k \right\}
 \end{aligned}$$

Da $a_0 \geq |\dots| \iff a_0 \geq (\dots) \wedge a_0 \geq -(\dots)$ kann man schreiben:

LOP:

$$\left[\begin{array}{ll} a_0 & = \text{Min!} \\ a_0 - a_1 n_{11} - a_2 n_{21} - \dots & - a_n n_{nn} \geq -f_1 \\ \vdots & \\ a_0 - a_1 n_{1k} - a_2 n_{2k} - \dots & - a_n n_{nk} \geq -f_k \\ a_0 + a_1 n_{11} + a_2 n_{21} + \dots & + a_n n_{nn} \geq f_1 \\ \vdots & \\ a_0 + a_1 n_{1k} + a_2 n_{2k} + \dots & + a_n n_{nk} \geq f_k \end{array} \right.$$

ZF $\rightarrow a_0$, Rest = Restriktionen

Das ist ein *lineares Optimierungsproblem* mit den Variablen a_0, a_1, \dots, a_n ; ohne Vorzeichenrestriktionen.

2 Das allgemeine lineare Optimierungsproblem (LOP)

geg.:

$\mathbb{R}^n, n \geq 1$, Punkte oder Ortsvektoren des $\mathbb{R}^n : x, c$,

$\mathbb{R}^m, m \geq 1$, Vektoren des $\mathbb{R}^m : b, y, y^T = (y_1, \dots, y_m)$,

Matrizen $(m \times n)$ reeller Zahlen: $A = (a_{rs}), 1 \leq r \leq m, 1 \leq s \leq n$.

A bildet den \mathbb{R}^n in den \mathbb{R}^m ab gemäß $Ax = y$.

(Halbordnung:) $\underset{\mathbb{R}^m}{y} \overset{1}{\geq} \underset{\mathbb{R}^m}{y} \iff \underset{\mathbb{R}^n}{y_i} \overset{2}{\geq} \underset{\mathbb{R}^n}{y_i} \quad \forall i$

$$\text{LOP (1): } Q = c^T x = \text{Min!} \\ Ax \leq b$$

(äquiv.: $-Q = \text{Max!}$)

$(A : (m \times n) \rightarrow \text{Restriktionen}, Q : \text{Zielfunktion (Linearform)}, x \text{ mit } Ax \leq b \text{ heißt zulässig})$

2.0.1 Bemerkung

Darstellung von LOP(1) durch *nichtnegative* Variable:

Zu *gegebenen* $x \in \mathbb{R}^n$ ex. stets $x' \geq 0, x'' \geq 0$ aus dem \mathbb{R}^n mit $x = x' - x''$.

$$\left[\text{zum Bsp.: } x = (x + x^*) - x^* \text{ mit } x^* = \begin{pmatrix} x_1^* \\ \vdots \\ x_n^* \end{pmatrix}, x_i^* = \begin{cases} x_i & , \text{ falls } x_i \geq 0 \\ -x_i & , \text{ falls } x_i < 0 \end{cases} \right.$$

$$\text{und } 0 \leq x + x^* = (x_i + x_i^*), \text{ da } x_i + x_i^* = \begin{cases} 2x_i & , \text{ falls } x_i \geq 0 \\ 0 & , \text{ falls } x_i < 0 \end{cases}$$

$$0 \leq x^* = (x_i^*), \text{ da } x_i^* \geq 0.]$$

Subst. in (1):

$$\begin{array}{l} \boxed{\begin{array}{l} c^T x' + (-c^T) x'' = \text{Min!} \\ A(x' - x'') \leq b \\ x' \geq 0, x'' \geq 0 \end{array}} \begin{array}{l} \nearrow \\ \rightarrow \\ \searrow \end{array} \boxed{\begin{array}{l} \tilde{c}^T x = \text{Min!} \\ (A, -A) \begin{pmatrix} x' \\ x'' \end{pmatrix} \leq b \\ x = \begin{pmatrix} x' \\ x'' \end{pmatrix} \geq 0 \end{array}}$$

\rightsquigarrow Typ des neuen Programms:

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{LOP(2): } \tilde{c}^T x = \text{Min!} \\ \tilde{A}x \leq b \\ x \geq 0 \end{array}} \quad \boxed{\text{LOP(1)} \rightarrow \text{LOP(2)}}$$

Dieses x ist im oben hergeleiteten Programm des Typs 2 im $\mathbb{R}^{2n} : \begin{pmatrix} x' \\ x'' \end{pmatrix}$

$$\tilde{c} : \begin{pmatrix} c \\ -c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n}, \quad \tilde{A}_{(m \times 2n)} = (A, -A),$$

LOP(1) hat in der Form (LOP(2)) *mehr Variablen und Restriktionen*.

2.0.2 Bemerkung

LOP(2) \Rightarrow LOP(1) (Überführung)

LOP(2) ist Spezialfall von LOP(1), wenn man die Restriktionen $\begin{cases} \tilde{A}x & \leq b \\ x & \geq 0 \end{cases}$ zusammenfasst:

$$A'x \leq b' : \quad A'x = \begin{pmatrix} \tilde{A} \\ -\mathcal{I} \end{pmatrix} x \leq \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix}.$$

2.0.3 Bemerkung

Die Typen LOP(1) und LOP(2) sind *äquivalent*.

Jede Lösung von LOP(2) löst LOP(1), jede Lösung von LOP(1) erzeugt eine von LOP(2).

2.0.4 Bemerkung

Herleitung von Typ (2) aus (1), sodass die Zahl der Variablen und Restriktionen *gleich* bleibt:

$(1) \Rightarrow (2)$:

Sei x_1 *nicht vorzeichenbeschränkt*.

Besteht die erste Spalte von A nur aus Nullen $\rightarrow x_1$ bel. $\rightarrow Q$ in LOP(1) hat kein endliches Minimum oder Koeffizienten (der ZF) bei x_1 verschwindet, dann tritt aber x_1 im LOP(1) gar nicht auf.

Im anderen Fall sei $a_{11} \neq 0$.

Da

$$\sum a_{1j}x_j \leq b_1 \Rightarrow b_1 - \sum a_{1j}x_j = y_1 \geq 0$$

und deshalb durch *Elimination* nach x_1 :

$$x_1 = (b_1 - y_1 - a_{12}x_2 - \dots - a_{1n}x_n) \frac{1}{a_{11}}$$

Die erste Zeile des Restriktionssystems wird $y_1 \geq 0$, aus den übrigen eliminiert man x_1 .

Bei m Restriktionen würde man etwa m Variablen ersetzen (Rang m), die restlichen sind beliebig, insbesondere ist ≥ 0 möglich.

Vorteil: in der Behauptung genannt

Nachteil: man muss eliminieren.

2.0.5 Bemerkung: Ein LOP(2) ist äquivalent zu einem LOP(3)

$$\text{LOP(3): } \begin{array}{l} Q = c^T x = \text{Min!} \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{array}$$

a) $Ax = b$ ist äquivalent zu $Ax \leq b$ und $-Ax \leq -b$.

Dann ist $\left. \begin{array}{l} c^T x = \text{Min!} \\ Ax \leq b \\ -Ax \leq -b \\ x \geq 0 \end{array} \right\} \text{Restriktionen}$ ein LOP vom Typ (2).

b) Ist ein LOP(2) gegeben $\Rightarrow \exists y \geq 0$ zu jedem "zulässigen" x mit $Ax + y = b$, denn

$$y = b - Ax \geq 0.$$

Damit gilt

$$\text{LOP(2): } \begin{array}{l} \tilde{c}^T x = \text{Min!} \\ \tilde{A}x \leq b \\ x \geq 0 \end{array} \Rightarrow \text{LOP(3): } \begin{array}{l} c^T x + 0 \cdot y = \text{Min!} \\ Ax + y = b \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \geq 0 \end{array}$$

Umschreiben von LOP(3) in die Standardform:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathfrak{z}, \begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda, \mathcal{A} = (A, \mathcal{I})$$

$$\mathcal{A} : \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}^m$$

$$\text{LOP(3): } \begin{array}{l} \lambda^T \mathfrak{z} = \text{Min!} \\ \mathcal{A} \mathfrak{z} = b \\ \mathfrak{z} \geq 0 \end{array}$$

y : Schlupfvariablenvektor

2.0.6 Bemerkung

Ein LOP vom Typ (1) ist einem vom Typ (2) und einem vom Typ(3) äquivalent.

2.1 Der zulässige Bereich

Punkte (oder Ortsvektoren) x , die dem Restriktionssystem des LOP(1) genügen, heißen für dieses Programm *zulässig*.

Ebenso bildet man den Zulässigkeitsbegriff für LOP(2), LOP(3).

Wir betrachten das LOP vom Typ 1:

$$\mathcal{B} = \{x \mid Ax \leq b, x \in \mathbb{R}^n\} \quad (1)$$

(zulässiger Bereich). Diese m Restriktionen $Ax \leq b$, die gleichzeitig erfüllt sein müssen, besagen

$$x \in \mathcal{B} \iff x \in \bigcap_{i=1, \dots, m} \mathcal{H}_i \left(\sum_{k=1}^n a_{ik} x_k \leq b_i \right)$$

$$\mathcal{H}_i = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{k=1}^n a_{ik} x_k \leq b_i \right\}$$

\mathcal{H}_i : abgeschlossener Halbraum.

Ist die begrenzende Hyperebene gegeben $\sum_{k=1}^n a_{ik} x_k - b_i = 0$,

$$\mathcal{H}_i^0 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{k=1}^n a_{ik} x_k = b_i\}$$

so liegen die Punkte $x \in \mathcal{B}$ wegen $\sum_{k=1}^n a_{ik} x_k - b_i \leq 0$ in Richtung des *negativen Gradienten* von

$$y = \sum_{k=1}^n a_{ik} x_k - b_i \quad : \\ -\text{grad } y = -(a_{i1}, \dots, a_{in})^T.$$

Beispiel:

$$x_2 \leq -x_1 + 1 \curvearrowright x_1 + x_2 \leq 1 \curvearrowright -\text{grad } y = (-1, -1)$$

2.2 Eigenschaften von \mathcal{B}

2.2.1 Definition Konvexe Linearkombination

Def.: *Konvexe Linearkombination* von Punkten $\overset{1}{x}, \dots, \overset{l}{x}$:

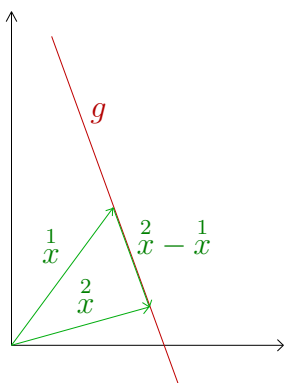
$$x = \sum_{j=1}^l \alpha_j \overset{j}{x}, \quad \alpha_j \geq 0, \quad \sum_{j=1}^l \alpha_j = 1.$$

Sind alle $\alpha_j > 0$: *echte* konvexe \mathcal{B} .

Beispiel:

$$l = 2 : \quad x = \alpha_1 \overset{1}{x} + \alpha_2 \overset{2}{x} = \alpha_1 \overset{1}{x} + \alpha_2 \overset{2}{x} + \alpha_2 \overset{1}{x} - \alpha_2 \overset{1}{x} \\ = \overset{1}{x} + \alpha_2 \left(\overset{2}{x} - \overset{1}{x} \right), \quad 0 \leq \alpha_2 \leq 1.$$

Diese x liegen auf der Geraden $\textcolor{red}{g} : x = \overset{1}{x} + t \left(\overset{2}{x} - \overset{1}{x} \right)$ zwischen $x(t=0) = \overset{1}{x}$ und $x(t=1) = \overset{2}{x}$.

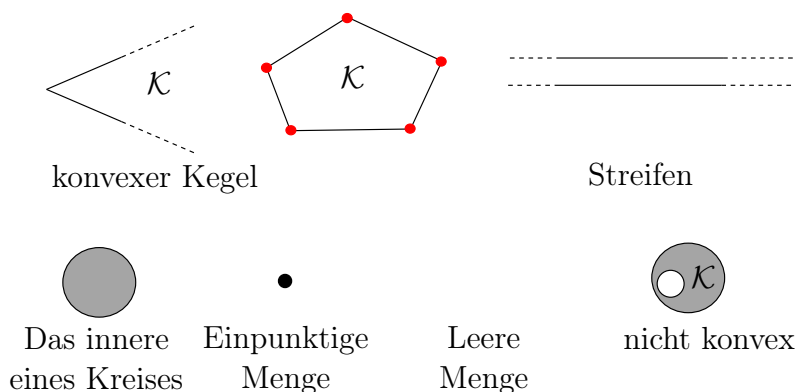


(Die konvexen Linearkombinationen zweier Punkte sind die Punkte auf der Verbindungsstrecke der gegebenen Punkte)

2.2.2 Definition

Eine Punktmenge $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^n$ heißt *konvex*, falls mit $\overset{1}{x}, \overset{2}{x} \in \mathcal{K}$ auch jede konvexe Linearkombination $\in \mathcal{K}$.

Beispiel:



2.2.3 Definition

Sei $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^n$ konvex. Der Punkt $x \in \mathcal{K}$ heißt *Ecke*, (von \mathcal{K}), falls er sich *nicht* als konvexe Linearkombination von 2 *anderen* Punkten aus \mathcal{K} darstellen lässt. (echt, da "andere")

Beispiel:

$\mathcal{K} = \text{abgeschlossener Einheitskreis}$

Behauptung: Jeder *Randpunkt* der Kreisscheibe \mathcal{K} ist *Ecke*.

Beweis: Andernfalls müsste ein Randpunkt $\overset{0}{x}$ *konvex kombinierbar* sein durch Punkte aus \mathcal{K} .

$$\overset{0}{x} = \alpha_1 \overset{1}{x} + \alpha_2 \overset{2}{x}.$$

Dann müsste die *Verbindungsstrecke* in \mathcal{K} liegen, dürfte also $\partial\mathcal{K}$ *nicht schneiden*, also da durch $\overset{0}{x}$ gehend, ist es *Tangente*, diese liegt bis auf $\overset{0}{x}$ außerhalb. (Existenz der Tangente klar: stetig differenzierbar)

2.2.4 Bemerkung

Der *Durchschnitt* (beliebig vieler) konvexer Mengen ist *konvex*.

Sei $\vartheta = \bigcap_{i \in \{1, \dots, l\}} \mathcal{K}_i$, $\overset{1}{x}, \overset{2}{x} \in \vartheta \Rightarrow \overset{1}{x}, \overset{2}{x} \in \mathcal{K}_i \forall i \in \{1, \dots, l\}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad & \alpha_1 \overset{1}{x} + \alpha_2 \overset{2}{x} \in \mathcal{K}_i \forall i \in \{1, \dots, l\} & \alpha_1 \geq 0, \alpha_1 + \alpha_2 = 1 \\ \Rightarrow \quad & \alpha_1 \overset{1}{x} + \alpha_2 \overset{2}{x} \in \vartheta = \bigcap \mathcal{K}_i \end{aligned}$$

2.3 Satz

\mathcal{B} ist *konvex* (auch wenn das Restriktionssystem Gleichungen enthält) und $x \in \mathcal{B}$ ist genau dann *Ecke von \mathcal{B}* , wenn es *Schnittpunkt* von n linear unabhängigen Hyperebenen ist. Es gibt höchstens endlich viele Ecken.

Beweis:

a) (**\mathcal{B} konvex**) Der Halbraum \mathcal{H} ist eine *konvexe* Menge: $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$

$$\left. \begin{array}{l} \sum_k a_{ik} x_k^1 \leq b_i \quad | \cdot \alpha_1 \geq 0 \\ \sum_k a_{ik} x_k^2 \leq b_i \quad | \cdot \alpha_2 \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \sum_k a_{ik} (\alpha_1 x_k^1 + \alpha_2 x_k^2) \leq b_i$$

(Stünde " $=$ " statt " \leq ", so wird die Hyperebene selbst als konvex erwiesen).

$$\mathcal{B} = \bigcap_{i=1}^m \mathcal{H}_i \stackrel{\text{Bem. 2.2.4}}{\Rightarrow} \mathcal{B} \text{ konvex.}$$

b₁) (**x Schnittpunkt von n linear unabhängigen Hyperebenen $\Rightarrow x$ Ecke**)

$\overset{0}{x} = (\overset{0}{x}_1, \dots, \overset{0}{x}_n)^T$ sei in \mathcal{B} und *Schnittpunkt* von n linear unabhängigen Hyperebenen \mathcal{H}_i :

$$(1) \quad A \overset{0}{x} \leq b \quad \left(\overset{0}{x} \in \mathcal{B} \right)!$$

und insbesondere

$$(\times) \quad \sum_{\nu=1}^n a_{i_\lambda \nu} \overset{0}{x}_\nu = b_{i_\lambda} \quad \lambda = 1, 2, \dots, \quad \underbrace{n \leq m}_{\text{damit es } n \text{ Hyp.eb. gibt}}.$$

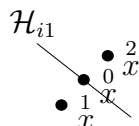
wobei die Zeilen $(a_{i_\lambda 1}, \dots, a_{i_\lambda n})$ linear unabhängig (!) sind.

$\overset{0}{x}$ ist also (! \rightarrow) eindeutige Lösung von (\times) .

Wäre $\overset{0}{x}$ nicht Ecke $\Rightarrow \exists \overset{1}{x}, \overset{2}{x} \in \mathcal{B}, \overset{1}{x} \neq \overset{2}{x} \neq \overset{0}{x}$ mit $\overset{0}{x} = \alpha_1 \overset{1}{x} + \alpha_2 \overset{2}{x}$.

$\overset{1}{x}$ kann nicht (\times) erfüllen, da $\overset{1}{x} \neq \overset{0}{x}$ ($\overset{0}{x}$ eindeutige Lösung von (\times)),

Etwa $\overset{1}{x} \notin \mathcal{H}_{i_1} \Rightarrow \overset{1}{x}$ etwa \in "inneren" Seite von \mathcal{H}_{i_1}



\Rightarrow da $\overset{0}{x} \in \mathcal{H}_{i_1}$, dass $\overset{2}{x} \in$ "äußeren" Seite
von \mathcal{H}_{i_1} .
 \uparrow "nicht zul."

\Rightarrow Widerspruch ($\cap x^2 \notin \mathcal{B}$).

b₂) (**Ecke \Rightarrow Schnittpunkt von n linear unabhängigen Hyperebenen**)

Sei (1) $\overset{0}{x} \in \mathcal{B}$ Ecke.

• Dann ist (1) erfüllt und genauer etwa

$$(2) \quad \sum_{\nu=1}^n a_{i_\mu \nu} \overset{0}{x}_\nu = b_{i_\mu} \quad , \mu = 1, 2, \dots, k.$$

- (3) $\sum_{\nu=1}^n a_{i_\nu} x_\nu < b_i, \quad i \neq i_1, \dots, i_k.$
- (3) wird dann auch von den x einer *Kugelumgebung* $U\left(\overset{0}{x}\right)$ erfüllt für hinreichend kleinen Kugelradius.
 - Gäbe es in (2) *weniger als n linear unabhängige Zeilen*
 \Rightarrow wenigstens eine *Gerade* g (oder höhere lineare Mannigfaltigkeit sonst) geht durch $\overset{0}{x}$ und erfüllt (2).
 - Betrachten Punkte der *Strecke* $\underbrace{U\left(\overset{0}{x}\right) \cap g = \gamma \neq \emptyset}_{\Rightarrow \gamma \in \mathcal{B}} \left(\overset{0}{x} \in \gamma\right)$

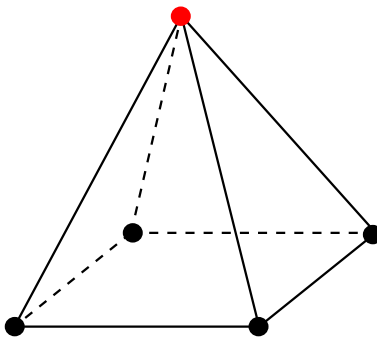
Da $\overset{0}{x}$ Mittelpunkt von $\gamma \Rightarrow \overset{0}{x}$ kann *nicht Ecke* sein.

\curvearrowright Annahme *falsch*. Es gibt *mindestens n linear unabhängige Zeilen* in (2).

$\curvearrowright \overset{0}{x}$ ist *Schnittpunkt* von n *linear unabhängigen Hyperebenen*.

Mehr als n Hyperebenen sind linear abhängig.

\rightarrow solche Ecken: *entartet*.



Beim Beweis wurde nicht benutzt:

" \leq steht wirklich in jeder Restriktion" statt " $=$ ",

\curvearrowright Beweis bleibt richtig (wenn in den Restriktionen Gleichheitszeichen stehen (\rightarrow Fälle 2,3 mit erfasst))

c) Ecken existieren höchstens, wenn

$n \leq m.$ $\leftarrow (\uparrow b_1, b_2)$ Ecke \iff Schnittpunkte von n linear unabhängigen Hyperebenen)

In (1) gibt es $\binom{m}{n}^1$ *Systeme* von n *Zeilen*. Sind die n Zeilen eines solchen Systems linear *unabhängig*

\Rightarrow lösen, prüfen, ob Lösung (1) befriedigt, also in \mathcal{B} liegt

\Rightarrow es gibt *höchstens endlich viele Ecken*.

2.3.1 Bemerkung

$$\binom{20}{10} = 184\,756$$

Aber schon von der graphischen Methode her leuchtet ein, dass *Ecken* besondere Bedeutung zukommt, da sie den Rand des zulässigen Bereichs charakterisieren, (\uparrow abb. 1....)

Man benötigt ein *Verfahren*, die *Ecken durchzumustern*!

¹Kombination ohne Wiederholung: Zusammenstellung von n aus $m(n \leq m)$ Elementen

2.4 Definition

Ist der Durchschnitt einer Geraden mit \mathcal{B} mehr als einpunktig, so heißt er *Kante von \mathcal{B}* , wenn sich *kein Punkt* der Geraden als *konvexe Linearkombination* von 2 **nicht** auf der Geraden liegenden Punkten *aus \mathcal{B}* darstellen lässt.

- Die *Randpunkte einer Kante* sind also *Ecken*, da sie überhaupt nicht konvex kombinierbar sind.
- 2 *Ecken von \mathcal{B}* , welche durch eine *Kante* verbunden sind, heißen *benachbart*.

Der Eckenübergang ($Ecke \rightarrow$ Nachbarecke)

- Sei $\overset{0}{p}$ *Ecke* von \mathcal{B} :

$$\begin{aligned} (1) \quad & \boxed{\sum_{\nu=1}^n a_{i\nu} \overset{0}{x}_{\nu} = b_i} \quad i = 1, \dots, n, n \text{ linear unabhängige } \mathcal{H}_i \\ (2) \quad & \boxed{\sum_{\nu=1}^n a_{j\nu} \overset{0}{x}_{\nu} \leq b_j} \quad j = n+1, \dots, m. \end{aligned}$$

- Ist $\overset{0}{p}$ *nicht entartet*: In (2) gilt " $<$ ".
Sonst: " $=$ " in einigen Ungleichungen von (2).
- Einführung einer neuen Koordinatenbasis:

Ursprung: $\overset{0}{p}$
Koordinatenhyperebene: \mathcal{H}_i .

- Da die \mathcal{H}_i *linear unabhängig* \leadsto auflösen von

$$(\text{Transformierte } T :) \quad \boxed{y_i = b_i - \sum a_{i\nu} x_{\nu}} \text{ möglich.}$$

- *Einsetzen* in $Ax \leq b$:

$$(1)' \quad \begin{array}{ccccccc} y_1 & & & & & & \geq 0 \\ & y_2 & & & & & \geq 0 \\ & & \ddots & & & & \\ & & & & y_n & & \geq 0 \\ a'_{n+1,1} y_1 & + \dots & + a'_{n+1,n} y_n & \leq & b'_{n+1} \\ & \vdots & & & \\ a'_{m,1} y_1 & + \dots & + a'_{m,n} y_n & \leq & b'_m \end{array}$$

- Bei Transformationen T gilt: $\overset{0}{x} \rightarrow \overset{0}{y} = \underbrace{(0, \dots, 0)}_n^T$ zulässig

$$\rightarrow b'_j \geq 0 \quad \forall j = n+1, \dots, m.$$

(= 0 nur bei Entartung, dann aber in einigen Fällen notwendig)

- Die ersten Zeilen von (1)' sagen: Die *y-Koordinaten des zulässigen Bereichs \mathcal{B}* sind alle *nichtnegativ*, es wurde also eine solche Koordinatentransformation vorgenommen, dass \mathcal{B} jetzt im *positiven Orthanten* liegt.

- Betrachtung der *nichtnegativen i-ten Koordinatenachse* und \cap mit \mathcal{B} liefert in (1)':
i fest

$$(1)'' \quad \begin{array}{rcl} & y_i & \geq 0 \\ y_1 = \dots = y_{i-1} = y_{i+1} = \dots = y_n & = & 0 \\ a'_{n+1,i} y_i & \leq & b'_{n+1} \quad , \quad b'_{n+1} \geq 0 \\ & \vdots & \\ a'_{m,i} y_i & \leq & b'_m \quad , \quad b'_m \geq 0 \end{array}$$

- a) Falls $a'_{n+1,i}, \dots, a'_{m,i} \leq 0 \Rightarrow$ gesamte nichtnegative i-te Achse $\subset \mathcal{B}$.

Sie ist natürlich *Kante*!

Denn es müssten sonst *Linearkombinationen* mit Punkten des positiven Or-
thanten existieren, diese haben aber Koordinaten $y_{j \neq i} > 0$, also deren konvexe!
Linearkombination, Widerspruch!

- b) $a'_{ji} > 0$ für gewisse j .

$\overset{0}{p}$ nicht entartet: $b'_{n+1} > 0, \dots, b'_m > 0$,

(1)'' ist erfüllt für $y_i = 0, y_i$ wachsend mit " $<$ ", bis zu einem Grenzwert:

$$y_i^* = \text{Min}_{a'_{ji} > 0} \frac{b'_j}{a'_{ji}} = \frac{b'_r}{a'_{ri}} > 0.$$

Die y_i -Achse gehört von 0 bis y_i^* zu \mathcal{B} ² und ist also (wie oben) Kante.

$$\overset{*}{p}: \quad \overset{*}{y} = \underbrace{(0, \dots, y_i^*, 0, \dots, 0)^T}_n$$

ist dann *Ecke* als Endpunkt einer Kante.

Und zwar *Nachbarecke* von $\mathcal{O} = (0, \dots, 0, \dots, 0)^T$ in y -Koordinaten, also vom
Ausgangspunkt $\overset{0}{p}$.

In $\overset{*}{P} : \overset{*}{y}$ schneiden sich folgenden Hyperebenen:

$$\begin{array}{ccccccc} \mathcal{H}_1, & \dots, & \mathcal{H}_{i-1}, & \mathcal{H}_{i+1}, & \dots, & \mathcal{H}_n \\ \downarrow & & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ y_1 = 0 & & y_{i-1} = 0 & y_{i+1} = 0 & & y_n = 0 \end{array}$$

und \mathcal{H}_r : (da man an diese anstößt)

$$a'_{r1} y_1 + \dots + a'_{ri} y_i + \dots + a'_{rn} y_n = b'_r.$$

$\mathcal{H}_1, \dots, \mathcal{H}_{i-1}, \mathcal{H}_{i+1}, \dots, \mathcal{H}_n, \mathcal{H}_r$ sind *linear unabhängig*: $a'_{ri} > 0$.³

²wegen $y_i^* = \text{Min}_{a'_{ji} > 0}$. Für $a'_{ji} < 0$ Bedingung in (1)'' ohnehin erfüllt.

³Die *Normalen* der neuen Basishyperebenen sind: $\begin{pmatrix} (1) \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} (2) \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} (r) \\ a'_{r1} \\ \vdots \\ a'_{ri} \\ a'_{rn} \end{pmatrix} \leftarrow i \begin{pmatrix} (n) \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$

Als *Basis* des \mathbb{R}^n waren die n linear unabhängigen Hyperebenen $\mathcal{H}_k : y_k = 0 (k = 1, \dots, n)$ gewählt worden mit Ursprung in $\overset{0}{p} : \overset{0}{y}$.
 Jetzt wählt man in $\overset{*}{P} : \overset{*}{y} : \mathcal{H}_k$ wie bei $\overset{0}{x}$, aber

$$\boxed{\mathcal{H}_i \xrightarrow{\text{Austausch}} \mathcal{H}_r.} \quad (\text{Wiederholung möglich})$$

Man kann aber von einem *nicht* entarteten Eckpunkt:

r kann unter den $n + 1, n + 2, \dots, m$ *eindeutig* bestimmt sein.

Dann tritt im Zulässigkeitsbereich \mathcal{B} in den Gleichungen (1)' das *Gleichheitszeichen genau n -mal* auf $\underbrace{(1, 2, \dots, i - 1, i + 1, \dots, n, r)}_{y_j = 0}$.

$\overset{*}{y}$ ist nicht entartet. [Sonst: entartet].

Man versucht jetzt einen weiteren Austauschschritt.

$$\text{c) } \underbrace{b'_\mu = 0 \text{ für gewisse } n + 1 \leq \mu \leq m}_{\text{Entartung}}, \quad \underbrace{a'_{ji} > 0 \text{ für gewisse } j}_{\text{notw. damit ü.b.h. } y_i \text{ i. d. Restriktionen aufr.}}$$

- Ist zugleich $a'_{ji} > 0, b'_j = 0 \Rightarrow$ für $y_i > 0$ ist (1)'' nicht erfüllbar \Rightarrow die positive y_i -Achse $\notin \mathcal{B}$.
- Falls für alle $a'_{ji} > 0$ stets $b'_j > 0 \Rightarrow$ man erhält wie in b) die y_i -Achse als Kante und gelangt zu einem Nachbareckpunkt.

Man hätte aber bei $\overset{0}{P}$ (wegen der *Entartung*) andere Basishyperebenen wählen können.

\Rightarrow Man gelangt *eventuell* zu einem anderen benachbarten Eckpunkt.

21.04.2021

2.5 Übersicht

Mann muss also beim Eckenübergang im \mathbb{R}^n :

- 1) Aufschreiben der, die *Anfangsecke* charakterisierenden, n *einander unabhängigen Hyperebenen*.
- 2) *Koordinatentransformation* T (*Ecke* wird neuer *Nullpunkt*, die n Restriktionen, die mit " = " erfüllt sind \curvearrowright Ebenen neue Koordinatenhyperebene.)
- 3) *Auflösen von* T , einsetzen in $Ax \leq b$.
 Es verändern sich: die letzten $m - n$ Zeilen stark
 : die ersten $n \curvearrowright y_j \geq 0$.
- 4) Tabelle der y_i , man suche (alle) *Nachbarecken*

y_1	y_2	y_s	\dots	y_n	$(i = 2)$
	$\overset{*}{y}_2 = \text{Min}_{a'_{j2} > 0} \frac{b'_j}{a'_{j2}} = \frac{b'_r}{a'_{r2}}$				

- 5) Bei $\overset{0}{P} \rightarrow \overset{*}{P} (\dots \overset{*}{y}_i \dots)$ *Austausch*:

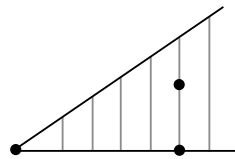
$$\mathcal{H}_1, \dots, \mathcal{H}_n \rightarrow \mathcal{H}_1, \mathcal{H}_{i-1}, \mathcal{H}_{i+1}, \mathcal{H}_n, \mathcal{H}_r$$

2.6 Konvexe (beschränkte) Polyeder (Polytop)

Der zulässige Bereich \mathcal{B} ist durch $Ax \leq b$ gegeben, da wir vom Typ $LOP(1)$ ausgehen.

Es gibt die *Möglichkeiten*:

- 1) \mathcal{B} ist *leer*.
- 2) \mathcal{B} *nichtleere, beschränkte* Menge des \mathbb{R}^n (Bez.: *konvexe Polytop*)
(also im Inneren eines genügend großen n -dimensionalen Würfels um den Nullpunkt)
- 3) \mathcal{B} *unbeschränkte Menge* des \mathbb{R}^n (*konvexer polyedrischer Kegel*)
(von \mathcal{B} ist durch einen "genügend großen Würfel um den Nullpunkt" ein Polyeder abschneidbar).



Satz gilt nicht
(Ecke)

2.7 Satz

Ist \mathcal{B} *konvexes Polytop*, (lässt sich als *konvexe Hülle seiner Eckpunkte* darstellen), so ist *jeder Punkt in \mathcal{B}* eine *konvexe Linearkombination* der endlich vielen *Ecken*.

(Mit der Formulierung des Satzes ist der Name Polyeder gerechtfertigt.)

Beweis: \mathcal{B} wird durch $Ax \leq b$ im \mathbb{R}^n bestimmt.

$A: m \times n$.

$\overset{0}{x} \in \mathcal{B}$ heiße "von der *Sorte (Typ) k* ", wenn er auf " k der m Hyperebenen \mathcal{H}_i ($k = 0$ möglich, Schlussweise analog) : (i -te Zeile von $A\overset{0}{x} \leq b$ mit " $=$ " erfüllt) *liegt*."

Sei $\overset{0}{k} < \overset{0}{m}$ ⁴ für $\overset{0}{x} \in \mathcal{B}$ ($\overset{0}{x}$ beliebig, fest)

- Sind unter den k Zeilen n *linear unabhängige* $\rightarrow \overset{0}{x}$ ist *Ecke*. Fertig $\overset{0}{x}$ durch einen Eckpunkt *konvex kombinierbar*.
- Sonst ist das *Gleichungssystem* der $\overset{0}{k}$ Zeilen wenigstens durch die Punkte einer *Geraden* erfüllt:

$$x = \overset{0}{x} + \lambda g.$$

⁴ $k = m \begin{cases} n \text{ unabhängig} \rightarrow \text{Ecke} \\ \text{abhängige Zeilen streichen} \end{cases}$

(*) Einsetzen in die restlichen Zeilen von $Ax \leq b$: $\overset{\bullet}{A}x \leq \overset{\bullet}{b}$

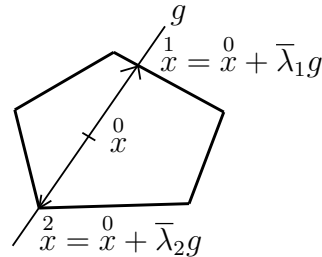
$$\underbrace{\overset{\bullet}{A}x}_{< \overset{\bullet}{b}} + \lambda \overset{\bullet}{A}g \leq \overset{\bullet}{b} \text{ für kleine } |\lambda|.$$

für $\lambda = 0$ mit " $<$ " echt erfüllt, da " x^0 von der Sorte k ".

Wächst $|\lambda| \Rightarrow$ es muss für ein $\bar{\lambda}_1 > 0$ und ein $\bar{\lambda}_2 < 0$ eine Verletzung von " \leq " eintreten, da sonst (wenigstens) eine Halbgerade ganz zu \mathcal{B} gehören müsste entgegen der Voraussetzung.

x^0 ist also durch

und
$$\begin{cases} x^1 = x^0 + \bar{\lambda}_1 g \\ x^2 = x^0 + \bar{\lambda}_2 g \end{cases}$$



konvex kombinierbar.

Und x^1, x^2 erfüllen mindestens eine weitere Restriktion mit "Gleichheitszeichen", sind also "von der Sorte" $\geq k+1$.

\Rightarrow • "Resultat:"

Jeder Punkt $x \in \mathcal{B}$ kann durch Eckpunkte oder durch Punkte mindestens einer Sorte höher als er selbst konvex kombiniert werden.

• Induktion \Rightarrow

Jeder Punkt $x \in \mathcal{B}$ kann durch Eckpunkte oder durch Punkte der höchsten Sorte konvex kombiniert werden, die in \mathcal{B} existieren.

Diese sind aber Ecken (dies folgt sofort aus "Resultat", da für Punkte der höchsten Sorte die zweite Möglichkeit entfällt.)

2.8 Das Optimierungsproblem

• Sei $f(x)$ für $x \in \mathcal{B}$ definiert. (\mathcal{B} konvex)

$\mu = f(x^0)$ heißt globales Minimum von $f(x)$ auf \mathcal{B} ,

$$\text{falls } f(x) \geq f(x^0) \quad \forall x \in \mathcal{B},$$

x^0 muss dabei nicht eindeutig bestimmt sein.

$\mu = f(x^0)$ heißt lokales Minimum von f auf \mathcal{B} , wenn

$$f(x) \geq f(x^0) \quad \forall x \in U(x^0) \cap \mathcal{B} \quad \text{für hinreichend kleine}$$

Umgebung $U(x^0)$.

Methode: lokal (Diff.r., Methode des steilsten Abstiegs)

(\searrow nicht stets möglich! Relative Extrema)

Optimierungskriterium: lokal.

- Ein globales Minimum ist lokal. Die Durchmusterung der lokalen Minima ist bei großer Anzahl sehr schwierig. *Allgemeine* globale Verfahren sind oft nicht effektiv (aber: Globale Optimierung : d.-c.-Funktionen).
Man ist auf spezielle, den Gegebenheiten angepasste Methoden angewiesen.

Sei \mathcal{B} konvex.

Ist aber f konvex oder sogar linear (und \mathcal{B} konvex), so gibt es sehr *gut* entwickelte Methoden zum Auffinden des globalen Minimums.

2.9 Definition (konvex/konkav)

$f(\chi)$ heißt auf \mathcal{B} konvex (konkav), wenn

$$f\left(\lambda_1 \overset{1}{\chi} + \lambda_2 \overset{2}{\chi}\right) \underset{(\geq)}{\leq} \lambda_1 f\left(\overset{1}{\chi}\right) + \lambda_2 f\left(\overset{2}{\chi}\right) \quad \forall \lambda_1, \lambda_2 \text{ mit } \lambda_1, \lambda_2 \geq 0, \lambda_1 + \lambda_2 = 1;$$
$$\forall \overset{1}{\chi}, \overset{2}{\chi} \in \mathcal{B}.$$

- (Ist f linear \Rightarrow es gilt " $=$ ").
- " $<$ " liefert *streng* konvexe Funktionen bei $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$.
- rechts steht lineare Funktion in $\lambda = \lambda_1; (\lambda_2 = 1 - \lambda)$, f also Sehne zwischen 2 Werten.

2.10 Satz

Für f konvex gilt: Jedes lokale Minimum ist zugleich globales Minimum.

(Man darf also lokale Methoden zur Minimumssuche verwenden!)

Beweis: Wäre $\mu = f\left(\overset{0}{\chi}\right)$ lokales Min., und doch $\mu_1 = f\left(\overset{1}{\chi}\right) < \mu$, $\overset{0}{\chi}, \overset{1}{\chi} \in \mathcal{B}$.

$\Rightarrow \chi = \lambda \overset{1}{\chi} + (1 - \lambda) \overset{0}{\chi} \in \mathcal{B}$ für $0 < \lambda \leq 1$ klein.

$\Rightarrow f\left(\lambda \overset{1}{\chi} + (1 - \lambda) \overset{0}{\chi}\right) \leq \lambda f\left(\overset{1}{\chi}\right) + (1 - \lambda) f\left(\overset{0}{\chi}\right) < \lambda \mu + (1 - \lambda) \mu = \mu,$

also $f(\chi) < f\left(\overset{0}{\chi}\right)$ für gewisse χ beliebig nahe an $\overset{0}{\chi}$.

\hookrightarrow Widerspruch $\overset{0}{\chi}$ nicht lokales Minimum.

2.11 Satz: Existenz der Lösung nicht gesichert

Eine *streng konvexe* Funktion kann das Minimum *nur* in *einem* Punkt annehmen.

Beweis: Wäre nämlich $\mu = f\left(\overset{1}{\chi}\right) = f\left(\overset{2}{\chi}\right)$ das Minimum

$$\Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\overset{1}{\chi} + \frac{1}{2}\overset{2}{\chi}\right) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{f str. konv.}}}{<} \frac{1}{2}\mu + \frac{1}{2}\mu = \mu,$$

also μ nicht Minimum.

Sonst: \mathcal{B} konvex!

2.12 Satz

Für *konvexe* f ist die Menge der Stellen, an denen f sein Minimum annimmt, *konvex*.

Beweis: Sei $\mathcal{M} \subset \mathcal{B}$ die Menge der Minimumstellen, $\overset{1}{\chi}, \overset{2}{\chi} \in \mathcal{M}$.

Also: $f\left(\overset{1}{\chi}\right) = f\left(\overset{2}{\chi}\right) = \mu$.

\Rightarrow konvexe Linearkombination: $\lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0, \lambda_1 + \lambda_2 = 1$

$$\lambda_1 \overset{1}{\chi} + \lambda_2 \overset{2}{\chi} \in \mathcal{B} \quad (\mathcal{B} \text{ konvex})$$

und

$$\begin{aligned} f\left(\lambda_1 \overset{1}{\chi} + \lambda_2 \overset{2}{\chi}\right) &\underset{(\text{f konvex})}{\leq} \lambda_1 f\left(\overset{1}{\chi}\right) + \lambda_2 f\left(\overset{2}{\chi}\right) \\ &= \lambda_1 \mu + \lambda_2 \mu = \mu \end{aligned}$$

$\Rightarrow \mathcal{M}$ *konvex*.

- Ist mit f auch $-f$ *konvex*, so gilt der letzte Satz auch für das *Maximum*. Diese Forderung heißt aber

$$f\left(\lambda_1 \overset{1}{\chi} + \lambda_2 \overset{2}{\chi}\right) = \lambda_1 f\left(\overset{1}{\chi}\right) + \lambda_2 f\left(\overset{2}{\chi}\right)$$

und ist z.B. für *lineare* Funktionen erfüllt.

Konvexe Funktionen allgemein erfüllen die Forderung natürlich nicht.

Es gilt aber:

2.13 Satz

Eine *konkave* Funktion $f(\chi)$ nimmt ihr *globales Minimum* im konvexen beschränkten Polyeder (Polytop) \mathcal{B} in einer *Ecke* an.

Beweis: Seien $\overset{i}{\chi}$ ($i = 1, \dots, k$) die *endlichen vielen Ecken* von \mathcal{B} . Jedes $\chi \in \mathcal{B}$ ist dann so darstellbar (\uparrow Satz 2.7)

$$\chi = \sum \lambda_i \overset{i}{\chi}, \quad \sum \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0.$$

Es ex. natürlich

$$\mu = \underset{i}{\text{Min}} f\left(\overset{i}{\chi}\right) = f\left(\overset{j}{\chi}\right) \quad j \text{ fest, } 1 \leq j \leq k.$$

Für $\chi \in \mathcal{B}$ bel. folgt

$$f(\chi) = f\left(\sum_i \lambda_i \overset{i}{\chi}\right) \underset{\text{f konkav}}{\geq} \sum \lambda_i f\left(\overset{i}{\chi}\right) \geq \sum \lambda_i \mu = \mu.$$

Das $\text{Min}_{\chi \in \mathcal{B}} f(\chi)$ existiert also und wird am Eckpunkt $\overset{j}{\chi}$ angenommen.

- Die Suche nach dem *globalen Minimum* "reduziert" sich auf die *Inspektion* der *Eckpunkte* von \mathcal{B} .
 - Bei der linearen Optimierung gelten zugleich: (da eine lineare Zielfunktion zugleich konkav und konvex ist)
 - *Annahme* des *globalen Minimums* im konvexen Polytop in einer *Ecke* (*Konkavität*)
 - Falls eine Ecke *lokales* Minimum ist, so ist sie das *globale* Minimum (*Konvexität*)
- ⇒ Mann kann also *lokale* Methoden anwenden, um das *globale* Minimum festzustellen.
Für das Maximum gilt eben dasselbe.

Da bei *unbeschränkten* Bereichen im Fall der Existenz von Lösungen ein durch einen Würfel abgeschnittenes Teilgebiet betrachtet werden kann, werden die *Ecken allgemein* bei der linearen Optimierung eine *entscheidende Rolle* spielen.

3 Die Simplexmethode (Dantzig)

- Typ 3 der LP

$$\text{LOP (3)} \quad \mathcal{B} : \begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} A : m \times n\text{-Matrix} \\ x : (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n, \\ b \in \mathbb{R}^m \end{array}$$

$$Q = \sum_{i=1}^n c_i x_i = \text{Min!}$$

- Durch eine Voruntersuchung sei eine Ecke $\overset{0}{p} \left(\overset{0}{x} \right) \in \mathcal{B}$ bekannt, LOP(3) hat also zulässige Elemente.

Linear abhängige Restriktionen in LOP(3) seien gestrichen

$$\Rightarrow \boxed{\text{Rang } A = m \leq n.}$$

$$\overset{0}{x} \text{ ist Ecke} \Rightarrow \begin{cases} \overset{0}{x} \text{ muss} \in \mathcal{B} \text{ sein.} \\ n \text{ linear unabhängige Restriktionen mit " = " erfüllen.} \end{cases}$$

Also: m Gleichungen gibt es ohnehin $\rightarrow \overset{0}{x}$ erfüllt $n - m$ der Vorzeichenrestriktionen mit " = ". ($\overset{0}{x}$ Ecke $n = (m + n - m)$ Restriktionen (linear unabhängig) mit " = " erfüllt) so dass $(1 \rightarrow)$ "diese" n Gleichungen linear unabhängig!

Diese $n - m$ verschwindenden Variablen heißen

$$\boxed{\text{Nichtbasisvariable: } x_{\lambda_{m+1}}, \dots, x_{\lambda_n}}$$

Die übrigen m :

$$\boxed{\text{Basisvariable: } x_{\lambda_1}, \dots, x_{\lambda_m}}.$$

Die mit " = " erfüllten Restriktionen lauten:

$$\begin{array}{ccccccccccc} a_{1\lambda_1} \overset{0}{x}_{\lambda_1} & + & \cdots & + & a_{1\lambda_m} \overset{0}{x}_{\lambda_m} & + & a_{1\lambda_{m+1}} \overset{0}{x}_{\lambda_{m+1}} & + & \cdots & + & a_{1\lambda_n} \overset{0}{x}_{\lambda_n} & = & b_1 \\ \vdots & & & & \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m\lambda_1} \overset{0}{x}_{\lambda_1} & + & \cdots & + & a_{m\lambda_m} \overset{0}{x}_{\lambda_m} & + & a_{m\lambda_{m+1}} \overset{0}{x}_{\lambda_{m+1}} & + & \cdots & + & a_{m\lambda_n} \overset{0}{x}_{\lambda_n} & = & b_m \\ & & & & & & 1 \cdot \overset{0}{x}_{\lambda_{m+1}} & & & & & & = 0 \\ & & & & & & & & \ddots & & & & \vdots \\ & & & & & & & & & & 1 \cdot \overset{0}{x}_{\lambda_n} & = & 0 \end{array}$$

Die Koeffizientenmatrix dieses Systems muss $\nearrow (\text{wegen}(1)) \searrow$ den Rang n haben. $\swarrow (\overset{0}{x} \in \mathbb{R}^n)$
Ihre Determinante hat die Gestalt

$$\left| \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & I_{n-m} \end{pmatrix} \right| \neq 0.$$

Der Matrix A_1 kommt der *Rang* m zu. D.h.,: die zu den Variablen $x_{\lambda_1}, \dots, x_{\lambda_m}$ gehörenden Spalten sind linear unabhängig.

\hookrightarrow Basisvektoren des \mathbb{R}^m

\rightarrow Name: Basisspalten, Basisvariable (BV)

$$\text{Ecke } \overset{0}{x} : \left(\underbrace{\overset{0}{x}_{\lambda_1} \geq 0, \dots, \overset{0}{x}_{\lambda_m} \geq 0}_{m \text{ Basisvariable}}, \underbrace{\overset{0}{x}_{\lambda_{m+1}} = 0, \dots, \overset{0}{x}_{\lambda_n} = 0}_{n-m \text{ Nichtbasisvariable}} \right)$$

3.1 Definition: Basislösung (BL)

Eine Lösung $\overset{0}{x}$ von $Ax = b$ heißt *Basislösung*, falls sie in $n - m$ verschwindende Variablen (Nichtbasisvariablen) und m Variablen mit *unabhängigen Basisvektoren* (Basisvariablen) eingeteilt werden kann.

Sind die *Basisvariablen* $\geq 0 \Rightarrow$ die *Basislösung* heißt *zulässig*.

- Eine Ecke $\overset{0}{P}$ gestattet also eine *zulässige Basislösung*.
Jede zulässige Basislösung stellt eine Ecke dar: laut Def. der Ecke.
- *Nichtentartete Ecke*: Keine weitere Restriktion von LOP(3) ist mit " = " erfüllt (alle *BV* > 0).
Entartete Ecke: Einige *BV* $= 0$. Die Zuordnung der BL muss *nicht* eindeutig sein, weil die Aufteilung in *BV* und *NBV* eventuell in *verschiedenen* Weisen erfolgen kann.

- Sei also unsere Ecke $\overset{0}{P}$ mit *BL* $\overset{0}{x}$ gegeben.
 \Rightarrow *Auflösung* von $Ax = b$ nach den *BV*
 \Rightarrow *Kanonische Form* von LOP(3): LOP(3')
(LOP(3')):

$$\begin{array}{ccccccc} x_{\lambda_1} & & & + a'_{1,m+1}x_{\lambda_{m+1}} & + \dots & + a'_{1,n}x_{\lambda_n} & = b'_1 \\ & \ddots & & & & \vdots & \\ & & x_{\lambda_m} & + a'_{m,m+1}x_{\lambda_{m+1}} & + \dots & + a'_{m,n}x_{\lambda_n} & = b'_m \\ x_{\lambda_1} \geq 0 & , \dots , & x_{\lambda_n} \geq 0 & & & & \end{array}$$

$$Q = \overset{0}{Q} + c'_{m+1}x_{\lambda_{m+1}} + \dots + c'_n x_{\lambda_n} = \text{Min!}$$

Auch Q ist noch durch die *NBV* *ausgedrückt* worden.

Die Werte unserer oben betrachteten zulässigen BL lassen sich ablesen:

$$\overset{0}{x}_{\lambda_{m+1}} = \dots = \overset{0}{x}_{\lambda_n} = 0 \quad \text{ohnein}$$

und daher $\overset{0}{x}_{\lambda_1} = b'_1, \dots, \overset{0}{x}_{\lambda_m} = b'_m$, \leftarrow *BL*

folglich $b'_1 \geq 0, \dots, b'_m \geq 0$.

Bei *Nichtentartung*: $b'_\mu > 0$ ($1 \leq \mu \leq m$).

Wert der Zielfunktion an der betrachteten BL: $Q \left(\overset{0}{x} \right) = \overset{0}{Q}$.

- *Bemerkung: (Matrixschreibweise):*

$LOP(3')$ wird erhalten aus $LOP(3)$, indem man statt $Ax = b$ schreibt (\tilde{A} sei die Matrix der Basisspalten, \hat{A} die Matrix der restlichen Spalten $x = \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \hat{x} \end{pmatrix}$):

$$\tilde{A}\tilde{x} + \hat{A}\hat{x} = b.$$

Es ist also die Basisinverse \tilde{A}^{-1} vorhanden

$$\begin{aligned} \Rightarrow \tilde{x} + \tilde{A}^{-1}\hat{A}\hat{x} &= \tilde{A}^{-1}b = b' \\ \tilde{x} &= -\tilde{A}^{-1}\hat{A}\hat{x} + \tilde{A}^{-1}b. \end{aligned}$$

Ecke $\overset{0}{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{x} \\ 0 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{x} = \tilde{A}^{-1}b \end{pmatrix} \Rightarrow Q \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{x} \end{pmatrix} = \tilde{c}^T \tilde{A}^{-1}b$

Zielfunktion in NBV:

$$\begin{aligned} Q &= \tilde{c}^T \tilde{x} + \hat{c}^T \hat{x} = \tilde{c}^T (\tilde{A}^{-1}b - \tilde{A}^{-1}\hat{A}\hat{x}) + \hat{c}^T \hat{x} \\ &= Q^0 + (\hat{c}^T - \tilde{c}^T \tilde{A}^{-1}\hat{A})\hat{x} \end{aligned}$$

$\begin{aligned} \text{LOP}(3'): \quad &\tilde{x} + \tilde{A}^{-1}\hat{A}\hat{x} = b' \\ &\tilde{x} \geq 0, \hat{x} \geq 0 \end{aligned}$	→	$\begin{aligned} (1'): \quad &\tilde{A}^{-1}\hat{A}\hat{x} \leq b' \\ &\hat{x} \geq 0 \end{aligned}$
$Q = Q^0 + \tilde{c}'^T \hat{x}$		$Q - Q^0 = \tilde{c}'^T \hat{x}$

Minimalkriterium: $\tilde{c}'^T \geq 0 \Rightarrow \overset{0}{x}$ ist Minimalstelle.

- *Bemerkung:* Unsere Optimierungsaufgabe lässt sich in *Raum der Nichtbasisvariablen* interpretieren:

($\overset{0}{x}$ ist jetzt natürlich der Nullpunkt ⁵ in diesem Raum):

$x_{\lambda_1} \geq 0, \dots, x_{\lambda_m} \geq 0$ wird in

$a'_{1,m+1}x_{\lambda_{m+1}} + \dots + a'_{1,n}x_{\lambda_n}$	$\leq b'_1$
\vdots	\vdots
$a'_{m,m+1}x_{\lambda_{m+1}} + \dots + a'_{m,n}x_{\lambda_n}$	$\leq b'_m$

eingearbeitet, dazu

$x_{\lambda_{m+1}}$	≥ 0
\ddots	\vdots
x_{λ_n}	≥ 0

und $Q - Q^0 = \tilde{c}'_{m+1}x_{\lambda_{m+1}} + \dots + \tilde{c}'_n x_{\lambda_n} = \text{Min!}$

Das ist ein System (1') wie bei 2.4 (Seite 16) beim Eckenübergang.

3.2 Satz: Minimalpunkt - Minimalkriterium

- (•) Hat in der *kanonischen* Form die Zielfunktion $Q(x)$ nur nichtnegativen Koeffizienten $\tilde{c}'_{m+1} \geq 0, \dots, \tilde{c}'_n \geq 0$, so nimmt Q das *Minimum* bei $\overset{0}{x}$ an.

⁵Raum des NBV: $\overset{0}{x}_{\lambda_{m+1}} = \dots = \overset{0}{x}_{\lambda_n} = 0$

Beweis:

$$\underset{(\text{bel.})}{x} \in \mathcal{B} \Rightarrow x_i \geq 0 \ \forall i \Rightarrow Q(x) = \overset{0}{Q} + \underbrace{c'_{m+1}x_{\lambda_{m+1}} + \dots}_{\geq 0} \geq \overset{0}{Q}$$

28.04.2021

[Gilt $c'_{m+1} > 0, \dots, c'_n > 0 \rightarrow$ für $x \neq \overset{0}{x}$ (dies nur hat $NBV \neq 0$ (im betr. Raum!)) ist $Q(x) > Q^0 \leadsto$ Minimalpunkt *eindeutig* bestimmt.]

- Ist $\overset{0}{x}$ hiernach *nicht* als Minimalpunkt *erkennbar* (obwohl er es sein könnte), sind also gewisse $c'_j < 0 \Rightarrow$ Übergang zu einer *Nachbarecke*.

Die Achse $\boxed{x_{\lambda_{m+1}} = 0, \dots, x_{\lambda_\alpha} \geq 0, \dots, x_{\lambda_n} = 0}$ (ein Raum der NBV) bildet eine von $\overset{0}{x}$ *ausgehende Kante*, wenn sie zu \mathcal{B} gehört.
Nach (LOP(3')) gilt für diese Achse im vollen \mathbb{R}^n :

$$(*) \quad \begin{bmatrix} x_{\lambda_1} & = b'_1 - a'_{1\alpha}x_{\lambda_\alpha} & \geq 0 \\ \vdots & & \\ x_{\lambda_m} & = b'_m - a'_{m\alpha}x_{\lambda_\alpha} & \geq 0 \end{bmatrix} \quad \text{mit } b'_\mu \geq 0$$

(x_{λ_α} ist Parameter, die übrigen NBV sind Null entlang der Kante).

- Sei nun diese Kante so gewählt, (*also* α), dass $c'_\alpha < 0$.
(Eventuell $\boxed{c'_\alpha = \text{Min}(c'_{m+1}, \dots, c'_n) < 0}$)
- Werte von Q auf dieser Kante: $\boxed{Q = \overset{0}{Q} + c'_\alpha x_{\lambda_\alpha} \leq \overset{0}{Q}}$ für $x_{\lambda_\alpha} \geq 0$.

3.2.1 Betrachtung der Fälle wie beim Eckenübergang:

a) $\boxed{a'_{1,\alpha} \leq 0, \dots, a'_{m,\alpha} \leq 0.}$

Die gesamt nichtnegative Achse $\subset \mathcal{B}$, da (\uparrow $(*)$) $x_{\lambda_1} \geq 0, \dots, x_{\lambda_m} \geq 0$ stets.
 Q fällt beliebig $\Rightarrow Q$ nimmt auf (dem also unbeschränkten) \mathcal{B} *kein* (endliches) Minimum an. (Wegen $Q = \overset{0}{Q} + \underbrace{c'_\alpha}_{<0} \underbrace{x_{\lambda_\alpha}}_{\geq 0}$)

b) $\overset{0}{x}$ *nicht entartet*: $\boxed{b'_1 > 0, \dots, b'_m > 0.}$

$\boxed{a'_{\mu,\alpha} > 0}$ für gewisse μ . ($1 \leq \mu \leq m$)

x_{λ_α} wachse von 0 ab. Kante endet im $\boxed{\text{Eckpunkt } \overset{*}{x}}$, wenn erstmals eines der x_{λ_ν} der Parameterdarstellung (etwa x_{λ_β}) verschwindet, also: bei (β ev. mehrdeutig)

$$\boxed{x_{\lambda_\alpha}^* = \text{Min}_{a'_{\mu,\alpha} > 0} \frac{b'_\mu}{a'_{\mu,\alpha}} = \frac{b'_\beta}{a'_{\beta,\alpha}} > 0} \quad (*)$$

\uparrow $(*)$ S. 27, Ungleichung (\cdot) : $\underbrace{b'_\mu}_{>0} - \underbrace{a'_{\mu\alpha}}_{>0} \underbrace{x_{\lambda_\alpha}}_{\geq 0} \geq 0$
mit $a'_{\beta\alpha} > 0$.

- Koordinaten von x^* :

$$\text{Zeile } \beta \text{ in } (*) : x_{\lambda_\beta}^* = b'_\beta - a'_{\beta\alpha} \cdot \frac{b'_\beta}{a'_{\beta\alpha}} = 0$$

$$x_{\lambda_1}^* \geq 0, \dots, \underbrace{x_{\lambda_\beta}^* = 0, \dots, x_{\lambda_m}^* \geq 0}_{\text{Basisvariable zu } x^*}, x_{\lambda_{m+1}}^* = 0, \dots, \underbrace{x_{\lambda_\alpha}^* > 0, \dots, x_{\lambda_n}^* = 0}_{\text{NBV zu } x^*}.$$

- Q -Wert:

$$Q^* = Q^0 + c'_\alpha x_{\lambda_\alpha}^* < Q^0.$$

\Rightarrow Wir haben eine *Nachbarecke* (als Endpunkt der Kante) x^* mit *kleinerem* Wert der Zielfunktion ermittelt.

Hierzu muss eine *zulässige BL* gehören:

($n-m$) verschwindende Komponenten $\neg\downarrow$

$$\begin{array}{c} \text{Austausch} \\ \downarrow \qquad \qquad \qquad \downarrow \\ \text{Stelle: } \beta \qquad \qquad \qquad \text{Stelle: } \alpha \\ \underbrace{x_{\lambda_1}^* \geq 0, \dots, x_{\lambda_\alpha}^* > 0, \dots, x_{\lambda_m}^* \geq 0}_{\text{Basisvariable zu } x^*}; \quad \underbrace{x_{\lambda_{m+1}}^* = 0, \dots, x_{\lambda_\beta}^* = 0, \dots, x_{\lambda_n}^* = 0}_{\text{NBV zu } x^*} \end{array}$$

- Ebenso ein *kanonisches Programm*:

- In (LOP(3')) wird die Zeile β nach x_{λ_α} aufgelöst, dies geht, da $a'_{\beta\alpha} > 0$. ($x_{\lambda_\alpha}^*$ wird neue **BV**).

Jetzt wird die *Auflösung* anstelle der β . Zeile eingesetzt und außerdem x_{λ_α} in den übrigen Zeilen *eliminiert*.

- Wie bei (LOP(3')) sieht man die *Unabhängigkeit* der (*neuen*) *Basisvektoren*.

Die neuen rechten Seiten sind wieder *nichtnegativ* (\sim), da wir wieder in einer Ecke sind.

Sind einige *Null*: Entartung von x^* .

Dann war aber oben schon β nicht eindeutig bestimmt.

- Jedenfalls kann mit x^* , der *neuen BL* und dem *neuen kanonischen Programm* (LOP(3'))* die Untersuchung neu begonnen werden.

$$x_{\lambda_\alpha} = \curvearrowright \text{ Elimination! } a'_{1\alpha} x_{\lambda_\alpha} = \alpha_{1\alpha} (-\dots x_{\lambda_{m+1}} \dots)$$

$$\begin{array}{l} \text{Zeile } \beta \rightarrow \begin{array}{ccccccc} x_{\lambda_1} & + & \left(a'_{1,m+1} - \frac{a'_{1,\alpha} a'_{\beta,m+1}}{a'_{\beta\alpha}} \right) x_{\lambda_{m+1}} + \dots + & \left(-\frac{a'_{1,\alpha}}{a'_{\beta\alpha}} \right) x_{\lambda_\beta} + \dots + & \left(a'_{1,n} - \frac{a'_{1,\alpha} a'_{\beta,n}}{a'_{\beta\alpha}} \right) x_{\lambda_n} & = & \left(b'_1 - \frac{a'_{1,\alpha} b'_\beta}{a'_{\beta\alpha}} \right) \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ x_{\lambda_\alpha} & + & \frac{a'_{\beta,m+1}}{a'_{\beta\alpha}} x_{\lambda_{m+1}} + \dots + & \frac{1}{a'_{\beta\alpha}} x_{\lambda_\beta} + \dots + & \frac{a'_{\beta,n}}{a'_{\beta\alpha}} x_{\lambda_n} & = & \frac{b'_\beta}{a'_{\beta\alpha}} > 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ x_{\lambda_m} & + & \left(a'_{m,m+1} - \frac{a'_{m,\alpha} a'_{\beta,m+1}}{a'_{\beta\alpha}} \right) x_{\lambda_{m+1}} + \dots + & \left(-\frac{a'_{m,\alpha}}{a'_{\beta\alpha}} \right) x_{\lambda_\beta} + \dots + & \left(a'_{mn} - \frac{a'_{m,\alpha} a'_{\beta,n}}{a'_{\beta\alpha}} \right) x_{\lambda_n} & = & \left(b'_m - \frac{a'_{m,\alpha} b'_\beta}{a'_{\beta\alpha}} \right) \end{array} \end{array}$$

$$Q = \left(c'_{m+1} - \frac{c'_\alpha a'_{\beta,m+1}}{a'_{\beta\alpha}} \right) x_{\lambda_{m+1}} + \dots + \left(-\frac{c'_\alpha}{a'_{\beta\alpha}} \right) x_{\lambda_\beta} + \dots + \left(c'_n - \frac{c'_\alpha a'_{\beta,n}}{a'_{\beta\alpha}} \right) x_{\lambda_n} + Q^0 + \frac{c'_\alpha b'_\beta}{a'_{\beta\alpha}}$$

Man erhält diese Koeffizientenmatrix indem man die nach dem Basisaustausch entstehende Matrix

$$\begin{array}{c}
\text{Austausch} \\
\downarrow \quad \quad \quad \downarrow \\
\text{Austausch: } A_a \quad \left(\begin{array}{cccccccccc}
1 & 0 & a'_{1\alpha} & \dots & 0 & a'_{1\,m+1} & \dots & 0 & \dots & a'_{1n} \\
\vdots & 1 & a'_{2\alpha} & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\vdots & \vdots & 0 < a'_{\beta\alpha} & \dots & \vdots & \vdots & \dots & 1 & \dots & a'_{\beta n} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\vdots & \vdots & a'_{m\alpha} & \dots & 1 & a'_{m,m+1} & \dots & 0 & \dots & a'_{mn}
\end{array} \right) \\
\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{Spalte } \beta \rightarrow B_1}
\end{array}$$

, an deren B_1 -Anteil man $\det(B_1) \neq 0$ sieht, mit der Matrix

$$\text{Elimination: } E_\beta^1 = \underbrace{B_1^{-1}}_{\text{Inverse zu } B_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & -\frac{a'_{1\alpha}}{a'_{\beta\alpha}} & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & \frac{1}{a'_{\beta\alpha}} & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -\frac{a'_{m\alpha}}{a'_{\beta\alpha}} & \dots & 1 \end{pmatrix} \text{ multipliziert.}$$

Es ist $B_1^{-1} = E_\beta^1 \cdot E^{-1}$

(E^{-1} : Basisinverse der 1. kanonischen Form) $B_1 \cdot B_1^{-1} = B_1 \cdot E_\beta^1 = E$

3.2.2 Bemerkung

(E_β^1) Basisinverse nach 1. Austauschschritt.

(E_β^1)⁻¹ Basisspaltenmatrix nach 1. Schritt.

- Jetzt wird ein *neuer Austauschschritt* mit neuer (mittels E_β^1 transformierten) kanonischen Form durchgeführt.

Dies liefert neue *Basisspaltenmatrix nach 2. Schritt*:

(E_β^2)⁻¹, die Basisspalten liegen aber in der mittels E_β^1 transformierten Form vor! *Rücktransformation*:

$\Rightarrow (E_\beta^1)^{-1}(E_\beta^2)^{-1}$ ist also die Matrix der Basis in den ursprünglichen Spalten ($LOP(3')$) dargestellt.

Man erhält also die *Matrix der Basisinversen* nach dem ν . Schritt in der nichttransformierten (also der ($LOP(3')$) Form so:

$$(*) \quad \boxed{E_\beta^\nu \cdot E_\beta^{\nu-1} \cdot \dots \cdot E_\beta^2 \cdot E_\beta^1 \cdot \underbrace{E_\beta^0}_{E \text{ selbst}}}$$

- Die Basisinversen transformieren sich also schrittweise wie eine Matrix bei Multiplikation mit einer Matrix E_β^μ von links, also wie die Koeffizienten des kanonischen Systems bei der 1. Auflösung zu ($LOP(3')$)^{*}
- Schreibt man dabei E_β^μ in der Form

$$E + \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{a'_{1\alpha}}{a'_{\beta\alpha}} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \frac{1}{a'_{\beta\alpha}} - 1 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & -\frac{a'_{m\alpha}}{a'_{\beta\alpha}} & 0 \end{pmatrix},$$

so sieht man, dass *speicherplatzmäßig* das Produkt (*) nur den Platz von ν *Spalten* fordert, aber die *gesamte Information* über die *Basis* bis zum ν . Schritt enthält.

(\Rightarrow ? Simplexmethode)

c) $a'_{\mu\alpha} > 0$ für gewisse μ .

$\overset{0}{x}$ entartet: $b'_k = 0$ für gewisse k .

Wie bei b) wird zu einer *Nachbarecke* x^* übergegangen:

Man muss $x^*_{\lambda_\alpha} = \min_{a'_{\mu,\alpha} > 0} \frac{b'_\mu}{a'_{\mu,\alpha}} = \frac{b'_\beta}{a'_{\beta,\alpha}} \geq 0$
jzt. auch =0 mögl., da Entar.

mit $a'_{\beta,\alpha} > 0$ bilden.

Man erhält den (neuen) *Eckpunkt*: x^* :

$x^*_{\lambda_1} \geq 0, \dots, x^*_{\lambda_\beta} = 0, \dots, x^*_{\lambda_m} \geq 0; x^*_{\lambda_{m+1}} = 0, \dots, x^*_{\lambda_\alpha} \geq 0, \dots, x^*_{\lambda_n} = 0$

Fall 1) $x^*_{\lambda_\alpha} > 0 \rightarrow b'_\beta > 0 \rightarrow$ alles wie bei b).

⊙ 2) $x^*_{\lambda_\alpha} = 0 \rightarrow b'_\beta = 0, p^*(x^*) = (b'_1, \dots, b'_m, 0, \dots, 0) = \overset{0}{p}(x^*)$.

Man bleibt an derselben Ecke $\overset{0}{p}$.

$\overset{*}{Q} = \overset{0}{Q}$.

Da auch $a'_{p,\alpha} > 0 \rightarrow$ Übergang zu *neuer* BL mit neuen kanonischen Programm

möglich. Bei c2) *bleiben wir bei* $\overset{0}{P}$, gehen aber zu einer *anderen* BL über.

Sie kann Ausgangspunkt der weiteren Untersuchungen sein.

03.05.2021

3.3 Iteration (Simplexalgorithmus)

- Treten bei den Eckenübergängen *keine Entartungen* ein

\Rightarrow • der Simplexalgorithmus

(sukzessive Ausführung, **Ecke** \rightarrow **Nachbarecke**, **BL** \rightarrow **BL** dieser Übergänge)
 ist nach *endlich* vielen Schritten beendet.

- Man hat entweder das *Minimum* gefunden *oder* seine *Nichtexistenz* festgestellt:

denn es kann eintreten:

- a) Minimalpunkt erreicht,
 - b) Minimalpunkt existiert nicht,
- } **Ende.**

- c) Übergang zur Nachbarecke mit *kleinerem* Q .
Rückkehr zum *gleichen* Punkt also *unmöglich*.
Da *nur endlich viele Eckpunkte* existieren
 \Rightarrow c) kann nur endlich oft eintreten
 \Rightarrow Ende nach a) oder b).

3.4 Die Simplextableaus

Für jede erreichte Ecke (oder BL) wird die kanonische Form in einem Tableau angelegt: *Tableau in $\overset{0}{\chi}$*

BV \ NBV	$x_{\lambda_{m+1}}$	\dots	$x_{\lambda_{\alpha}}^{\circledast}$	\dots	x_{λ_n}	re. Seite	\circledast
x_{λ_1}	$a'_{1,m+1}$	\dots	$a'_{1,\alpha}$	\dots	$a'_{1,n}$	b'_1	$\frac{b'_1}{a'_{1,\alpha}}$
\vdots	\vdots		\vdots		\vdots	\vdots	\vdots
$\circledast x_{\lambda_{\beta}}$	$a'_{\beta,m+1}$	\dots	$a'_{\beta,\alpha}$	\dots	$a'_{\beta,n}$	b'_{β}	$\frac{b'_{\beta}}{a'_{\beta,\alpha}}$
\vdots	\vdots		\vdots		\vdots	\vdots	\vdots
x_{λ_m}	$a'_{m,m+1}$	\dots	$a'_{m,\alpha}$	\dots	$a'_{m,n}$	b'_m	
–Zielfkt.	c'_{m+1}	\dots	$c'_{\alpha} < 0$	\dots	c'_n	$\begin{pmatrix} 0 \\ -Q \end{pmatrix}$	
Σ -Probe	σ'_{m+1}	\dots	σ'_{α}	\dots	σ'_n	σ^0	

Übergang zur nächsten BL:

- I. Test: $c'_{m+1} \geq 0, \dots, c'_n \geq 0$ ja \Rightarrow Minimalpunkt (\leftarrow Satz 4.2)
nein \Rightarrow Übergang!

- II. 1. Auswahl eines $c'_\alpha < 0$. (α bestimmt die Pivot-spalte)

Test: Pivotspalte ≤ 0 : ja \Rightarrow kein Minimum existiert,
nein \Rightarrow mit II. 2. fortsetzen

2. Für $a'_{j\alpha} > 0$ bilde man $\frac{b'_j}{a'_{j\alpha}}$ und trage dies in $\textcircled{*}$ ein.

3. Der kleinste Quotient bestimmt die *Pivotzeile* β \odot $a'_{\beta\alpha}$: *Pivotelement*

Gemäß S.28 (Austausch) wird das neue Tableau aufgestellt.
(Entsprechende kanonische Form: S.28)

III. Neues Tableau

1. Pivotelement $\rightarrow \frac{1}{a'_{\beta\alpha}}$
2. *Restliche Elemente* der alten Pivotzeile $\cdot \frac{1}{a'_{\beta\alpha}}$
Restliche Elemente der alten Pivotspalte $\cdot \left(-\frac{1}{a'_{\beta\alpha}}\right)$

3. Spalte $(m+1)$ + $a'_{\beta,m+1}$ · neue Pivotspalte
 ...
 Spalte (n) + $a'_{\beta,n}$... " "
 Spalte (rechte Seite) + b'_β ... " "

Man braucht nur das *neue kanonische Programm* entsprechend abzuschreiben (S.28)!

NBV BV	$x_{\lambda_{m+1}}$...	$x_{\lambda_\beta}^*$...	x_{λ_n}	
x_{λ_1}	$a_{1,m+1} - \frac{a'_{1\alpha}}{a'_{\beta\alpha}} a'_{\beta,m+1}$...	$-\frac{a'_{1\alpha}}{a'_{\beta\alpha}}$...	$a'_{1,n} - \frac{a'_{1\alpha}}{a'_{\beta\alpha}} a'_{\beta n}$	$b'_1 - \frac{a'_{1\alpha}}{a'_{\beta\alpha}} b'_\beta$
$x_{\lambda_\alpha}^*$	$\frac{1}{a'_{\beta\alpha}} a'_{\beta,m+1}$...	$\frac{1}{a'_{\beta\alpha}}$...	$\frac{1}{a'_{\beta\alpha}} \cdot a'_{\beta n}$	$\frac{1}{a'_{\beta\alpha}} b'_\beta$
x_{λ_m}	$a'_{m,m+1} - \frac{a'_{m\alpha}}{a'_{\beta\alpha}} a'_{\beta,m+1}$...	$-\frac{a'_{m\alpha}}{a'_{\beta\alpha}}$...	$a'_{m,n} - \frac{a'_{m\alpha}}{a'_{\beta\alpha}} a'_{\beta n}$	$b'_m - \frac{a'_{m\alpha}}{a'_{\beta\alpha}} b'_\beta$
-Zielfkt.	$c'_{m+1} - \frac{c'_\alpha}{a'_{\beta\alpha}} a'_{\beta,m+1}$...	$-\frac{c'_\alpha}{a'_{\beta\alpha}}$...	$c'_n - \frac{c'_\alpha}{a'_{\beta\alpha}} a'_{\beta n}$	$\left(-Q\right) - \frac{c'_\alpha}{a'_{\beta\alpha}} b'_\beta$
Σ -Probe	$\sigma'_{m+1} - \frac{\sigma'_\alpha}{a'_{\beta\alpha}} a'_{\beta,m+1}$...	$-\frac{\sigma'_\alpha}{a'_{\beta\alpha}}$...	$\sigma'_n - \frac{\sigma'_\alpha}{a'_{\beta\alpha}} a'_{\beta n}$	$\overset{0}{\sigma} - \frac{\sigma'_\alpha}{a'_{\beta\alpha}} b'_\beta$
Σ -Test	1		1		1	1

Im Tableau steht $-Q$, um einen durchgehenden Algorithmus zu erzeugen. Man löst gewissermaßen das Problem $-Q = \text{Max.}$

Der Algorithmus endet in *endlich* vielen Schritten, wenn einer der Tests positiv ausfällt, in seltenen Fällen tritt ein Kreisen auf.

IV. Die Summenprobe

Im Ausgangstableau S. 31 setzen wir (*)

$$\begin{aligned} \sigma'_\mu &= 1 - c'_\mu - \sum_{k=1}^m a'_{k,\mu} \\ \overset{0}{\sigma} &= 1 - \left(-Q\right) - \sum_{k=1}^m b'_k \end{aligned}$$

$$\mu = m+1, \dots, n$$

Im Gesamtschema ist also die *Gesamtspaltensumme stets 1* (Σ -Test).

Diese 1 als Gesamtspaltensumme bleibt, wenn auch diese Zeile mit umgerechnet wird.

Für eine *Nichtpivotspalte* gilt nämlich: (etwa die 1.) (-:Pivotspalte)

(S.32 1. Spalte)

Hebt sich weg (\uparrow (*)) bis auf $+1 - \alpha'_{\beta,m+1}$

$$\sum_{k \neq \beta} \left(a'_{k,m+1} - \frac{a'_{k\alpha}}{a'_{\beta\alpha}} a'_{\beta,m+1} \right) + \frac{1}{a'_{\beta\alpha}} a'_{\beta,m+1} + c'_{m+1} - \frac{c'_\alpha}{a'_{\beta\alpha}} a'_{\beta,m+1} + \sigma'_{m+1} - \frac{\sigma'_\alpha}{a'_{\beta\alpha}} a'_{\beta,m+1} = 1$$

$$\begin{aligned} & \uparrow \quad \quad \quad \uparrow \quad \quad \quad \uparrow \quad \quad \quad \uparrow \quad \quad \quad \uparrow \\ & a'_{\beta,m+1} \left(-\sum_{k \neq \beta} \frac{a'_{k\alpha}}{a'_{\beta\alpha}} + \frac{1}{a'_{\beta\alpha}} - \frac{c'_\alpha}{a'_{\beta\alpha}} - \frac{\sigma'_\alpha}{a'_{\beta\alpha}} \right) \text{ wegheben bis auf } a_{\beta,m+1} \cdot \frac{a'_{\beta,\alpha}}{a'_{\beta\alpha}} \\ & = \frac{a'_{\beta,m+1}}{a'_{\beta\alpha}} \left(-\sum_{k \neq \beta} a'_{k\alpha} + 1 - c'_\alpha - \sigma'_\alpha \right) = \frac{a'_{\beta,m+1}}{a'_{\beta\alpha}} \cdot a'_{\beta\alpha} = a'_{\beta,m+1} \end{aligned}$$

Im Falle "Pivotspalte": Nur der Rest:

$$\frac{1}{a'_{\beta\alpha}} \left(-c'_\alpha - \sigma'_\alpha - \sum_{k \neq \beta} a'_{k\alpha} + 1 \right) = \frac{a'_{\beta\alpha}}{a'_{\beta\alpha}} = 1 \rightarrow \frac{a'_{\beta\alpha}}{a'_{\beta\alpha}} = 1.$$

3.5 Anfangstableau

- Das Anfangstableau geht von der *kanonischen* Form ($LOP(3')$) aus. Diese (oder eine Anfangsecke) müssen erst erhalten werden:
- Liegt das Program in der Form ($LOP(2)$) vor:

$$Ax \leq b, \quad Q = c^T x = \text{Min!}, \quad x \geq 0,$$

($A : (m, n)$ - Matrix)

und ist $b \geq 0$, so ist der *Nullpunkt Eckpunkt*: Durch Einführung der *Schlupfvariablen*

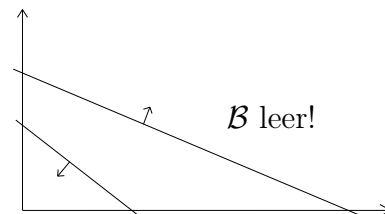
$$x_{n+1} \geq 0, \dots, x_{n+m} \geq 0 \quad (\uparrow \text{LOP } 3)$$

gilt:

$$\left. \begin{array}{llll} x_{n+1} & + & a_{11}x_1 & + \dots & + & a_{1n}x_n = b_1 \geq 0 \\ \vdots & & & & & \\ x_{n+m} & + & a_{m1}x_1 & + \dots & + & a_{mn}x_n = b_m \geq 0 \\ \\ (n+m \text{ Restrikt. mit " = " erfüllt in der Ecke}) & Q = & c_1x_1 + \dots + c_nx_n & = \text{Min!} \\ \underbrace{x_{n+1}, \dots, x_{n+m}}_{\text{BV}} & \underbrace{x_1, \dots, x_n}_{\text{NBV}} & & & & \end{array} \right\} \text{Anfangstableau}$$

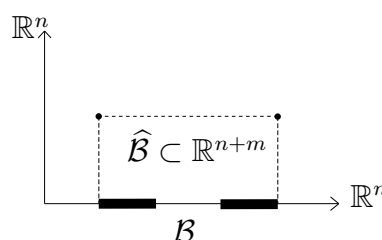
- In der allgemeinen Form (LOP 3) dagegen:

Min($Q = c^T x \mid x \geq 0, x \in \mathbb{R}^n$,
 $Ax = b, b \geq 0$)
 | (Ohne Rangvoraussetzung) |
 $m \begin{smallmatrix} \leq \\ \geq \end{smallmatrix} n$
 (mit $b \geq 0$) was stets geht
 müsste gar *keine* Ecke existieren!



3.6 Methode der Schein- (oder künstlichen) Variablen (2-Phasen-Methode)

- $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^n$ wird in einen konvexen Bereich $\hat{\mathcal{B}} \subset \mathbb{R}^{n+m}$ eingebettet, sodass $\mathcal{B} = \hat{\mathcal{B}} \cap \mathbb{R}^n$.
 $\mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n, 0, \dots, 0)\} \subset \mathbb{R}^{n+m}$



- In $\widehat{\mathcal{B}}$ sei eine *Ecke bekannt*.

Jetzt wandert man mittels des Simplex-Algorithmus längs $\widehat{\mathcal{B}}$ "auf \mathcal{B} zu" und hofft, eine Ecke von \mathcal{B} zu erreichen.

$$\widehat{\mathcal{B}} \subset \mathbb{R}^{n+m} : \underbrace{x_1, \dots, x_n}_{n \text{ natürl. Var.}}, \underbrace{x_{n+1}, \dots, x_{n+m}}_{m \text{ künstl. Var.}} : \mathbb{R}^{n+m}.$$

$$\begin{aligned} \widehat{(3)} \quad & \begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n + x_{n+1} & = b_1 \geq 0 \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n + \dots + x_{n+m} & = b_m \geq 0 \\ x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+m} & \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

- $\widehat{(3)}$ ist *kanonisch*, $\underbrace{\{0, \dots, 0\}}_{\text{NBV}}, \underbrace{\{x_{n+1} = b_1, \dots, x_{n+m} = b_m\}}_{\text{BV}}\}^T$

ist zulässige BL, also Ecke (d.h. erste zulässige BL trivialerweise gegeben)

$$\widehat{\mathcal{B}} \cap \mathbb{R}^n = \mathcal{B} \text{ (da } \mathbb{R}^n \cong \{(x_1, \dots, x_n, 0, \dots, 0)\} \text{)}.$$

"auf \mathcal{B} zu" wird so abgearbeitet:

$$U = x_{n+1} + \dots + x_{n+m} = \text{Min!}$$

Damit ist $\widehat{(3)}$ ein *Minimumsproblem*!

\Rightarrow Simplexmethode zum Auffinden einer Anfangsecke benutzen!

3.6.1 Bemerkung

- Wenn *Entartung ausgeschlossen* ist, so endet der Simplexalgorithmus (im \mathbb{R}^{n+m} nach endlich vielen Schritten) wegen $U \geq 0$ (und $\mathcal{B} \neq \emptyset$) in einem *Eckpunkt* von $\widehat{\mathcal{B}}$.

Sei dort

- 1) $U^* > 0 \Rightarrow \mathcal{B}$ leer.

Wäre nämlich $P \in \mathcal{B} \xrightarrow[\mathcal{B} = \widehat{\mathcal{B}} \cap \mathbb{R}^n]{\text{ex.}} P \in \widehat{\mathcal{B}}$. Aber in P wäre $U = 0$.

\rightarrow Widerspruch zu $\text{Min} \rightarrow U > 0$.

- 2) $U^* = 0 \Rightarrow$ als Minimalpunkt:
 $(x_1^* \geq 0, \dots, x_n^* \geq 0, x_{n+1}^* = 0, \dots, x_{n+m}^* = 0)$

Also $\in \mathcal{B}$. Es ist eine *Ecke* von \mathcal{B} :

$n + m$ linear unabhängige Zeilen müssen mit "=" (*) erfüllt werden, da er *Ecke* von $\widehat{\mathcal{B}}$ ist.

Im \mathbb{R}^n ($\underbrace{x_{n+1} = \dots = x_{n+m} = 0}_{\swarrow \text{--- } m+n \text{ --- } \searrow}$ setzen) müssen

davon n (linear unabhängige) Zeilen übrig bleiben:

$$\begin{array}{c} n \\ \begin{array}{|c|c|} \hline \text{Rang: } n & \\ \hline & \\ \hline \end{array} \\ m \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \end{array}$$

- *) Etwa folgende Gleichungen des Anfangsprogramms mit den künstlichen Variablen werden mit "=" erfüllt:

$$\left. \left\{ \begin{array}{l} \left(\begin{array}{cccc} a_{i1}x_1^* & + \dots & + a_{in}x_n^* \\ a_{j1}x_1^* & + \dots & + a_{jn}x_n^* \\ & & x_l^* \\ & & \ddots \\ & & x_k^* \end{array} \right) + x_{n+1}^* & = b_i \\ & + x_{n+j}^* & = b_j \\ & & = 0 \\ & & = 0 \\ & & = 0 \end{array} \right\} (*') \right\} \begin{array}{l} n \\ m \end{array}$$

(*) Das sind einige der gegebenen eben die linear unabhängigen (n)

3.7 Praktische Durchführung

Umrechnung von U auf die *Nichtbasisvariablen* von $(\text{LOP } \widehat{3})$:

$$U = \sum_{\mu=1}^m b_{\mu} - x_1 \sum_{\mu=1}^m a_{\mu 1} - \dots - \left(\sum_{\mu=1}^m a_{\mu n} \right) \cdot x_n$$

(\uparrow S.34 $U = x_{n+1} + \dots + x_{n+m} \stackrel{(3)}{=} b_1 - \sum_{j=1}^n a_{1j}x_j + \dots + b_m - \sum_{j=1}^n a_{mj}x_j = \overset{\nwarrow}{-}$)

Anfangstableau:

$(n+m) - m = n$ verschiedene Komponenten bei NBV \downarrow

BV \ NBV	x_1	x_2	\dots	x_n	
x_{n+1}	a_{11}	a_{12}	\dots	a_{1n}	b_1
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
x_{n+m}	a_{m1}	a_{m2}	\dots	a_{mn}	b_m
-Zielfkt.	$-\sum_{\mu} a_{\mu 1}$	$-\sum_{\mu} a_{\mu 2}$	\dots	$-\sum_{\mu} a_{\mu n}$	$-\sum_{\mu} b_{\mu}$

Nach *endlich* vielen Schritten erhält man das Tableau für den Minimalpunkt $\overset{*}{P}$.

	x_{λ_1}	x_{λ_2}	x_{λ_n}	
$x_{\lambda_{n+1}}$				
\vdots				
$x_{\lambda_{n+m}}$				
				$-U$

(Die grünen Spalten werden weggestrichen. Hier gilt $x_{n+1} = x_{\lambda_1}$, also wird dieses entfernt)

Schlussfolgerungen: (aus dem Endtableau)

I) $(-U) < 0 \Rightarrow \mathcal{B}$ leer. Fertig.

II) $(-U) = 0 \Rightarrow \overset{*}{P}$ Ecke von \mathcal{B} .

3.7.1 Bemerkung zu II:

Die Scheinvariablen können unter den NBV sein oder nicht!

II a) $(x_{n+1}, \dots, x_{n+m}) \subset \overbrace{(x_{\lambda_1}, \dots, x_{\lambda_n})}^{\text{NBV}}$. (Voraussetzung: $n > m$)
(d.h. alle künstlichen Variablen sind NBV)

Der Fall ist möglich, da in $\overset{*}{P}$ gilt $U = 0$, also $x_{n+1}^* = \dots = x_{n+m}^* = 0$.

(Ist $\overset{*}{P}$ nicht entartet, so gilt $x_{\lambda_{n+1}}^* > 0, \dots, x_{\lambda_{n+m}}^* > 0$,

dies sind aber die BV, darunter können die Scheinvariablen *nicht* sein. Also Fall II a) tritt jetzt sicher ein).

- Da (3) aus $(\hat{3})$ durch Nullsetzen der Scheinvariablen entsteht, müssen die Spalten zu x_{n+1}, \dots, x_{n+m} im Tableau (Anfangstableau für (3)) für $\overset{*}{P}$ gestrichen werden \rightarrow (siehe S.35 (unten)).
Jetzt eine BL bekannt. \Rightarrow Jetzt muss Q auf die restlichen (also zu (3) gehörigen) NBV umgerechnet werden (Um kanonische Form für Zielfunktion zu erhalten!) \Rightarrow Start zur Q - Optimierung.

II b) Ist $\overset{*}{P}$ entartet, so können einige der Scheinvariablen (also = 0 im Eckpunkt der gefundenen Werte) unter den BV vorkommen. Man hat dann noch *keine kanonische* Ausgangsform von (3) durch das Tableau für $\overset{*}{P}$ gefunden.

Man muss eine *andere Basisdarstellung* für $\overset{*}{P}$ suchen, die die Scheinvariablen *nicht* in der Basis enthält. (Motiv für Basiswechsel ist jetzt *nicht*: Optimierung)

BV \ NBV	nat. Var.				
	x_{λ_1}	\dots	x_{ν}	\dots	x_{λ_n}
$x_{\lambda_{n+1}}$	$a'_{..} \neq 0$				0 (als Wert von $x_{n+\mu}$ (da $U^* = 0$))
\dots					
Scheinvar. $x_{\lambda_{n+\mu}}$					
\dots					
$x_{\lambda_{n+m}}$					

Wenn ein $a'_{..} \neq 0$ in der Zeile einer Scheinvariablen in der Basis und einer Spalte einer natürlichen Variable steht, wählen wir dies als *Pivotelement*. Wir führen mit *Schema oben Basiswechsel* durch. Wegen der 0 bleiben *alle* rechten Seiten *gleich*. (siehe Seite 32, (Tableau), 30, c)) Damit natürlich die Werte der Variablen in der Basislösung

(! = den rechten Seiten, da NBV = 0). Man *bleibt* also an $\overset{*}{P}$.

\Rightarrow Man *wiederholt* diesen Übergang mehrfach, bis

1. Keine Scheinvariablen mehr unter den BV \Rightarrow II a
2. Doch noch Scheinvariablen in der Basis, aber in den Zeilen kein $a'_{..} \neq 0$ in Spalten, die zu natürlichen Variablen gehören.
Dies heißt:

In der zugehörigen kanonischen Form gibt es (Streichen \rightarrow) Gleichungen, die *nur* Scheinvariablen enthalten.

Nullsetzen der Scheinvariablen (denn das ist Übergang $\hat{\mathcal{B}} \rightarrow \mathcal{B}$) heißt: Gewisse *Spalten* werden *gestrichen* (wie bei obigen Vorgehen), und gewisse *Zeilen*, nämlich obige Gleichungen, die nur Scheinvariablen enthalten.

Das neue Programm (3) (also seine jetzt ermittelte kanonische Form) hat *weniger als* m Zeilen, d.h., der *Rang* von (3) war $< m$.

- Es ist damit in *jedem* Fall ein *Ausgangstableau* für die Optimierung von (3) erhalten worden.

Freilich, um zum Tableau von P^* zu kommen, müssten Kreise ausgeschlossen werden!

10.05.2021

3.8 Entartung

Bei der Beschreibung des Simplexalgorithmus wurde die *Nichtentartung* für die ? benötigt:

Bestimmung von

⊛ S.27 ⊙ S.30
$$x_{\lambda_\alpha}^* = \text{Min}_{a'_{\mu\alpha} > 0} \frac{b'_\mu}{a'_{\mu\alpha}} \left[= \frac{b'_\beta}{a'_{\beta\alpha} > 0} (\beta \text{ ev. mehrdeut.}) \right].$$

4 Lexikographische Simplexmethode (Methode der Lexikographischen Auswahl des Pivotelements)

- Man erkennt bei *b(*)S.27*, dass im Falle der *Nichtentartung* genau $n - m$ Kanten von einer Ecke ausgehen. (Man kann jede der Achsen $x_{\lambda_{m+1}}, \dots, x_{\lambda_n}$ für Bestimmung eines $x_{\lambda_\alpha}^* > 0$ verwenden).
- Bei einer *entarteten* Ecke kann es aber passieren, dass, obwohl *mehr* als $n - m$ Kanten von der Ecke ausgehen, *weniger als* $n - m$ (eventuell gar keine, wenn alle $b'_1, b'_2, \dots, b'_m = 0$ sind) Kanten durch die NBV einer Basisdarstellung beschrieben werden.
- Ist die Ecke *nicht Minimalpunkt*, so muss in jedem Falle *wenigstens* eine nach *fallenden* Q zeigende Kante geben. Diese muss aber *nicht* (unter den) durch die gerade ausgewählten $n - m$ Nichtbasisvariablen beschrieben sein (Fall c) 2., Seite 30).

⇒ Es ist so durchaus möglich, dass man immer in solchen Basisdarstellungen *kreist*, welche die gesuchte Kante *nicht* erfassen. Man kann aber eine *Vorschrift* für den *Basiswechsel* angeben, welche sicher *auf eine Kante mit fallenden* Q führt (das Kreisen ist damit ausgeschlossen).

Ein praktisches Beispiel führte noch nie zum Kreisen. Die bekannten Beispiele sind konstruiert.

Es genügt, die *Regel* für den *Basiswechsel* anzugeben:

Von Anfang an oder ab einer *Entartung* wird das Tableau *erweitert*: (Tableau für $\overset{0}{P}$, Ecke)

	$x_{\lambda_{m+1}}$	\dots	x_{λ_n}		
x_{λ_1}	$a'_{1,m+1}$	\dots	$a'_{1,n}$	b'_{10}	$b'_{11} \quad \dots \quad b'_{1m}$
\vdots	\vdots		\vdots	\vdots	\vdots
x_{λ_m}	$a'_{m,m+1}$	\dots	$a'_{m,n}$	b'_{m0}	$b'_{m1} \quad \dots \quad b'_{mm}$
	c'_{m+1}	\dots	c'_n	z'_0	$z'_1 \quad \dots \quad z'_m$
				\downarrow $-Q$	

Zielfunktion bleibt:

$$Q = c_1 x_1 + \dots + c_n x_n$$

- Es liegt für jede der $m + 1$ "rechten Seiten" ein LOP des Typs 3 vor.
- Jedes Tableau beschreibt einen Eckpunkt: ($\kappa = 0, 1, \dots, m$)

$$x_{\lambda_{m+1}} = \dots = x_{\lambda_n} = 0, \quad x_{\lambda_1} = b'_{1\kappa}, \dots, x_{\lambda_m} = b'_{m\kappa}.$$

$-Q = z'_0, [z'_1, \dots, z'_m]$ sind die *jeweiligen* Werte der Zielfunktion.
[.]

- Simultane Durchführung des Simplexalgorithmus für alle rechten Spalten. (Die neuen Spalten werden einfach mittransformiert).

- *Pivotelementbestimmung*: (Programm $\kappa = 0$)

$$\left[\begin{array}{l} \alpha : c'_\alpha < 0 \\ \beta : \text{Min}_{a'_{\mu\alpha} > 0} \frac{b'_{\mu 0}}{a'_{\mu\alpha}} = \frac{b'_{\beta 0}}{a'_{\beta\alpha}} \quad (\beta \text{ ev. nicht eindeutig}) \end{array} \right.$$

Bei *Nichtentartung*: $Q^* < Q^0$ (bzw. $z_0^* > z_0'$).

Bei *Entartung*: z_0' kann in mehreren Tableaus hintereinander konstant bleiben (*Kreisen*).

Dies wird durch folgende *Auswahlvorschrift ausgeschlossen*:

$$\left[\begin{array}{l} \alpha : c'_\alpha < 0 \\ \beta : \text{Lex. Min.} \left(\frac{b'_{\mu 0}}{a'_{\mu\alpha}}, \frac{b'_{\mu 1}}{a'_{\mu\alpha}}, \dots, \frac{b'_{\mu m}}{a'_{\mu\alpha}} \right) = \left(\frac{b'_{\beta 0}}{a'_{\beta\alpha}}, \dots, \frac{b'_{\beta m}}{a'_{\beta\alpha}} \right). \end{array} \right.$$

4.1 Definition

$w_1, w_2 \in \mathbb{R}^{m+1} \Rightarrow w_1 \succ w_2$ (Lexikographisch größer), wenn $\begin{array}{l} v_{10} = v_{20}, \dots, v_{1\nu} = v_{2\nu}, \\ v_{1\nu+1} > v_{2\nu+1}, -1 \leq \nu \leq m-1. \end{array}$

4.1.1 Bemerkung

Das ist eine Ordnung im \mathbb{R}^{m+1} mit den Eigenschaften:

Für u, w gilt *genau eine* der 3 Relationen:

$$u \prec w, u = w, w \prec u$$

1⁰ $u \prec w, w \prec m \Rightarrow u \prec m$ (*Transitivität*)

2⁰ $u \prec w \Rightarrow u + m \prec w + m$ (*Monotonie der Addition*)

3⁰ $\alpha > 0, u \prec w \Rightarrow \alpha u \prec \alpha w$ (*Monotonie der Vielfachbildung*)

$w \succ 0$ heißt *lexikographisch positiv*.

4.1.2 Bemerkung

Unter endlich vielen verschiedenen Vektoren gibt es *genau einen Lexikographisch kleinsten*.

Praktisch: Man sucht die Vektoren mit minimalen 1. Koeffizienten, unter diesen die mit min. zweiten...

(! Die lexikographische Auswahlregel enthält die gewöhnliche!)

4.2 Satz

Sind die Zeilenvektoren der rechten Seiten *linear unabhängig*, so auch die sich ergebenden Zeilenvektoren im *nächsten Tableau*.

Beweis: Da bei der Transformation nur die elementaren Umformungen

$$\begin{array}{l} \text{Zeile } \mu - \frac{a'_{\mu\alpha}}{a'_{\beta\alpha}} \cdot \text{Zeile } \beta \Rightarrow \text{Zeile } \mu \neq \beta \\ \frac{1}{a'_{\beta\alpha}} \cdot \text{Zeile } \beta \Rightarrow \text{Zeile } \beta \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc}
b'_{10} - \frac{a'_{1\alpha}}{a'_{\beta\alpha}} b'_{\beta 0} & , & b'_{11} - \frac{a'_{1\alpha}}{a'_{\beta\alpha}} b'_{\beta 1} & , & \dots & , & b'_{1m} - \frac{a'_{1\alpha}}{a'_{\beta\alpha}} b'_{\beta m} \\
\vdots & & \vdots & & & & \vdots \\
\frac{1}{a'_{\beta\alpha}} b'_{\beta 0} & , & \frac{1}{a'_{\beta\alpha}} b'_{\beta 1} & , & \dots & , & \frac{1}{a'_{\beta\alpha}} b'_{\beta m} \\
\vdots & & \vdots & & & & \vdots \\
b'_{m0} - \frac{a'_{m\alpha}}{a'_{\beta\alpha}} b'_{\beta 0} & , & b'_{m1} - \frac{a'_{m\alpha}}{a'_{\beta\alpha}} b'_{\beta 1} & , & \dots & , & b'_{mm} - \frac{a'_{m\alpha}}{a'_{\beta\alpha}} b'_{\beta m}
\end{array}$$

auftreten, bleibt der *Rang* der Matrix

$$\begin{pmatrix} b'_{10} & \dots & b'_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ b'_{m0} & \dots & b'_{mm} \end{pmatrix} \rightarrow \beta$$

erhalten,

damit die *Zeilenunabhängigkeit*.

(*)

4.3 Satz

Die Wahl von β ist stets *eindeutig*, wenn die *Zeilenvektoren* der Erweiterung *linear unabhängig* sind.

Beweis: Gäbe es nämlich 2 "kleinste" Vektoren, so müssten sie gleich sein:

$$\frac{1}{a'_{\mu\alpha}} (b'_{\mu 0}, \dots, b'_{\mu m}) = \frac{1}{a'_{\gamma\alpha}} (b'_{\gamma 0}, \dots, b'_{\gamma m})$$

$$\begin{array}{ccc}
\downarrow & & \downarrow \\
> 0 & & > 0 \rightarrow (\text{da } \neq 0), \text{ Klammern linear unabhängig,}
\end{array}$$

Widerspruch (*) S.40!

4.4 Satz

Sind die *Zeilenvektoren* der (vollen) rechten Seiten im Tableau *lexikographisch positiv* und *linear unabhängig* (wie 4.2 Satz), so auch im nächsten Tableau. *Beweis:* Es ergibt sich für die neue μ -te Zeile:

$$(b^*_{\mu 0}, b^*_{\mu 1}, \dots, b^*_{\mu m}) = \begin{cases} (b'_{\mu 0}, \dots, b'_{\mu m}) - \frac{a'_{\mu\alpha}}{a'_{\beta\alpha}} (b'_{\beta 0}, \dots, b'_{\beta m}) & , \text{ für } \mu \neq \beta \\ \frac{1}{a'_{\beta\alpha}} (b'_{\beta 0}, b'_{\beta 1}, \dots, b'_{\beta m}) & , \text{ für } \mu = \beta \end{cases}$$

a) $\mu = \beta$; da $a'_{\beta\alpha} > 0 \rightarrow$ fertig.

b) $\mu \neq \beta, a'_{\mu\alpha} \leq 0 \rightarrow$ fertig. Auswahlvorschrift für β

↓

c) $\mu \neq \beta, a'_{\mu\alpha} > 0 \rightarrow \frac{1}{a'_{\beta\alpha}} (b'_{\beta 0}, \dots, b'_{\beta m}) \prec \frac{1}{a'_{\mu\alpha}} (b'_{\mu 0}, \dots, b'_{\mu m}),$

da β eindeutig, (denn so wird β gerade nach *Auswahlvorschrift* bestimmt),
durchmultipliziert mit $a'_{\mu\alpha}$? \Rightarrow Behauptung folgt auch hier.

4.5 Satz

Der *Zielvektor* wird beim Übergang Tableau (!)

\rightarrow Tableau (*) stets *lexikographisch größer*. (im Tableau: $-Q$: Maximierung!)

Beweis: Bei der Tableautransformation gilt

$$\begin{array}{c}
 \underbrace{(z_0^*, z_1^*, \dots, z_m^*)}_{\downarrow} = \underbrace{(z_0', z_1', \dots, z_m')}_{\downarrow} - \overbrace{\left(\frac{c'_\alpha}{a'_{\beta\alpha}} \right)}^{>0} \underbrace{(b'_{\beta 0}, \dots, b'_{\beta m})}_{\substack{\nearrow \not\geq 0 \\ \searrow > 0}} \\
 \searrow \quad \quad \quad \searrow \quad \quad \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{Monotonie der Addition}} \\
 (z^* = z' + y \succ z'(2^0)) \Rightarrow \textcircled{>}
 \end{array}$$

Dies gilt *unabhängig von der Entartung*, auf die nirgends Bezug genommen wurde.
Wegen: Der *Zielvektor* wird *lexikographisch größer*, so wiederholt sich im Verfahren kein Zielvektor und kein Tableau.

(Ein Tableau bestimmt den Zielvektor eindeutig.)

Es kann *kein Kreisen* mehr eintreten. Das *Verfahren* endet in *endlich* vielen Schritten!

4.5.1 Bemerkung

Die Regel wird praktisch wenig verwendet, da sie aufwendig ist. Man baut lieber (etwa: 100-maliges Verbleiben am gleichen Eckpunkt) einen *Stopbefehl* (Q testen!) in den gewöhnlichen Algorithmus sein.

4.5.2 Bemerkung

Beispiel für die "ergänzende Matrix":

$$\begin{pmatrix} b'_{11} & \dots & b'_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dots & \dots & b'_{mm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}.$$

4.6 Umkehrsatz zum Minimalkriterium ((•) S.26)

Ist $\overset{0}{x}$ *Minimal(eck)punkt*, so gibt es eine zugehörige Basislösung, so dass

$$c'_{m+1} \geq 0, \dots, c'_n \geq 0$$

wird.

Beweis:

$\overset{0}{x}$ *nicht entartet*: Behauptung folgt nach Seite 28 (•). Man kommt sonst zu einer Ecke mit kleinerem Q .

(Behauptung folgt unmittelbar, da nur eine zugehörige BL existiert.)

$\overset{0}{x}$ *entartet*: Man findet nach einigen Schritten zu $\overset{0}{x}$ eine *Basis* mit *lexikographisch größtem Zielvektor*:

$$(z'_0, \dots, z'_m)$$

Für diese Basis ist Behauptung erfüllt.

Wäre nämlich ein $c'_\alpha < 0 \rightarrow$ Anwendung der Simplexmethode für erweitertes Program mit verschärfter Auswahlregel \curvearrowright erhalten maximalen Zielvektor, hier ist aber $c^*_{m+1} \geq 0, \dots, c^*_n \geq 0$

\Rightarrow Es könnte zu einem weiteren Tableau mit noch größerem Zielvektor übergegangen werden.

Wie schon früher allgemein gezeigt (beginnend S.21), zeigt der jetzt allgemein gültige Simplexalgorithmus, dass das Minimum, falls es existiert, in einem Eckpunkt angenommen wird.

5 Dualitätstheorie

$$(LOP(3)) : \begin{array}{lcl} c^T x & = & Q = \text{Min!} \\ Ax & = & b \quad (\text{Rang } A = m) \\ x & \geq & 0 \end{array}$$

- Betrachtung aller "Schnittpunkte" $\overset{0}{P}$ von $\begin{cases} Ax = b, \\ x \geq 0 \end{cases}$ die n unabhängige Restriktionen mit " $=$ " erfüllen. (Die Ecken sind dann die zulässigen Schnittpunkte).
Zu jedem (Schnittpunkt) $\overset{0}{P}$ gehört (S.25)) eine *Basislösung*

$$\overset{0}{x} = \left(\begin{array}{ccc} x_{\lambda_1}^0 & & \\ \vdots & & \\ x_{\lambda_m}^0 & & \\ x_{\lambda_{m+1}}^0 & = & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ x_{\lambda_n}^0 & = & 0 \end{array} \right) \Bigg\} \tilde{x}^0$$

sie ist zulässig oder nicht, im Entartungsfall mehrdeutig.

Matrix der Basisvektoren: (Basisspalten) [Vektoren im \mathbb{R}^m]

$$\begin{pmatrix} a_{1\lambda_1} & \cdots & a_{1\lambda_m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m\lambda_1} & \cdots & a_{m\lambda_m} \end{pmatrix} = \tilde{A} \quad (\text{Basismatrix}).$$

$$\text{Also: } Ax^0 = \tilde{A}\tilde{x}^0 = b \Rightarrow \tilde{x}^0 = \tilde{A}^{-1}b.$$

Sei $(u_1, \dots, u_m)^T$ beliebiger Vektor im \mathbb{R}^m .

$$\Rightarrow \tilde{A}^T u = \tilde{c} = (c_{\lambda_1}, \dots, c_{\lambda_m})^T \text{ sind Hyperebenen im } \mathbb{R}^m.$$

Der *Schnittpunkt*: $u_0 = \tilde{A}^{-T} \tilde{c}$ ⁶.

$$\text{Also: } \overset{0}{P} \xrightarrow{1)} \overset{0}{x} \rightarrow u_0 \quad \left(\overset{1)}{\rightarrow} \text{ bei Entartung } \text{mehrdeutig} \right)$$

$$\text{Und } \overset{0}{Q} = Q(\overset{0}{x}) = c^T \overset{0}{x} = \tilde{c}^T \tilde{x}^0 = \tilde{c}^T \tilde{A}^{-1} b = u_0^T b = b^T u_0$$

- \Downarrow Betrachtung des (zu (LOP(3)) dualen!) Problems

$$(LOP(3))^D : \begin{array}{lcl} b^T u & = & G = \text{Max!} \\ A^T u & \leq & c \end{array}$$

$$(\text{Rang } A^T : m, A^T : (n, m)\text{-Matrix, } \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{m1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix})$$

⁶ A^{-T} steht in dieser Vorlesung für die transponierte inverse Matrix von A

Seine "Schnittpunkte" (also Punkte P^0 , die m unabhängige Restriktionen mit " = " erfüllen):

$\tilde{A}^T u = \tilde{c}$ sind denen von (LOP(3)) durch die Basisvektoren (in \tilde{A}^T):

$$\tilde{x}^0 = \tilde{A}^{-1}b \rightarrow x^0 = (\tilde{x}^0, 0) \in \mathbb{R}^n \text{ eindeutig zugeordnet.}$$

Also: $P^0 \xrightarrow[1)]{ } u_0 \rightarrow x^0$

($\xrightarrow[1)]{ }$ bei Entartung ist Schritt "Schnittpkt." $\rightarrow u_0$ wieder mehrdeutig).

Und $\overset{0}{Q} = Q(\overset{0}{x}) = G(\overset{0}{u}) = \overset{0}{G}$

$$P^0 \rightarrow u_0 \xleftrightarrow{ } \overset{0}{x} \leftarrow P^0.$$

Das (LOP(3))^D ist vom Typ 1 und Rang $A^T = m$.

5.1 Satz: schwache Dualitätsaussage

Ist x zulässig in (LOP(3)), u in (LOP(3))^D, so ist

$$Q(x) \geq G(u).$$

Beweis: $A^T u \leq c \Rightarrow u^T A \leq c^T \quad | \cdot x \geq 0$ (x Spaltenvektor)

$$\begin{aligned} & \Downarrow \\ & u^T \underbrace{Ax}_{b} \leq c^T x = Q(x) \\ \Rightarrow G(u) = u^T b & \leq c^T x = Q(x). \end{aligned}$$

(LOP(3))

(PP)

(LOP(3))^D

(DP)

$$\begin{aligned} Q = c^T x &= \text{Min!}, x \in \mathbb{R}^n \\ Ax &= b \\ x &\geq 0 \\ \text{Rang } A &= m \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G = b^T u &= \text{Max!}, u \in \mathbb{R}^m \\ A^T u &\leq c \text{ Typ 1} \\ \text{Rang } A &= m \end{aligned}$$

$$Ax^0 = b \leftarrow P^0 \leftarrow \text{Schnittpunkt} \rightarrow P_D^0 : \tilde{A}^T u = \tilde{c} \rightarrow \tilde{A}^T u^0 = \tilde{c}$$

$$\begin{aligned} & \underbrace{\left(\overset{0}{x}_{\lambda_1}, \dots, \overset{0}{x}_{\lambda_m}, \right.}_{BV\left(\overset{0}{x}\right)} \\ & \left. \overset{0}{x}_{\lambda_{m+1}} = 0, \dots, \overset{0}{x}_{\lambda_n} = 0 \right)_{NBV\left(\overset{0}{x}\right)} \end{aligned}$$

↓

$$\begin{aligned} Ax^0 &= \tilde{A} \overset{0}{x} + \hat{A} \overset{0}{x} = \tilde{A} \overset{0}{x} = b \\ \overset{0}{x} &= \tilde{A}^{-1} b \\ \overset{0}{x} &= (\overset{0}{x}, 0)^T \end{aligned}$$

↑
(erfüllen $\xleftrightarrow[n]{m}$ linear unabhängige Restr. mit " = ",
($Ax = b, x \lesseqgtr 0$) ($A^T u \leq c$)
nicht notwendig die übrigen Restriktionen!
Wenn doch \Rightarrow es sind Ecken)

etwa
 $\tilde{c} = (c_{\lambda_1}, \dots, c_{\lambda_m})$
(Die Zeilen von \tilde{A}^T sind Basisvektoren des \mathbb{R}^m , sie sind hier Normalen von m Hyperebenen des \mathbb{R}^m)
 $\overset{0}{u} = \tilde{A}^{-T} \tilde{c}$

$$\begin{array}{ccc}
 P^0 \rightarrow \overset{0}{x} = \begin{pmatrix} \overset{0}{x} \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \xrightarrow{\text{mit einem } \tilde{A} \text{ erh\"alt man}} \\ \xleftarrow{\text{eindeutig}} \\ \xleftarrow{\text{mit gegeb. } \tilde{A} \text{ erh\"alt man}} \end{array} & \overset{0}{u} \leftarrow P_D^0 \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \text{nicht eindeutig.} & & \text{nicht eindeutig.} \\
 \text{bei Entartung} & & \text{bei Entartung}
 \end{array}$$

$$\underline{Q(\overset{0}{x}) = \tilde{c}^T \overset{0}{x} + \hat{c}^T \overset{0}{x} = \tilde{c}^T \overset{0}{x} = \tilde{c}^T \tilde{A}^{-1} b = (\tilde{A}^{-T} \tilde{c})^T b = \overset{0}{u}^T b = b^T \overset{0}{u} = G(\overset{0}{u})}$$

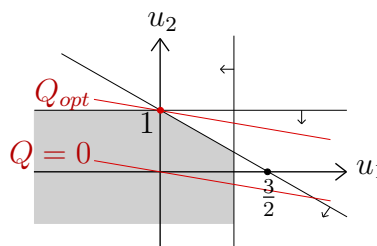
Seien x, u jeweils beliebig, zulässig in (3) bzw. $(3)^D \rightarrow x^T A^T u \leq x^T c$, da $x \geq 0$

$$\begin{array}{l}
 Q(x) = c^T x = x^T c \geq x^T A^T u = (Ax)^T u = b^T u = G(u) \\
 x \in \mathcal{B}_P \rightarrow Q(x) \geq G(u) \leftarrow u \in \mathcal{B}_D
 \end{array}$$

Beispiel:

$$(\text{LOP}(3)) : \begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 \rightarrow & \text{Min} \\ x_1 + 2x_2 & = 1 \\ 3x_2 + x_3 & = 4 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{cases} \quad \left(\begin{array}{l} \text{zul. Pkt.:} \\ x_1 = 0 \\ x_2 = \frac{1}{2} \\ x_3 = \frac{5}{2} \end{array} \right)$$

$$(\text{LOP}(3))^D : \begin{cases} u_1 + 4u_2 \rightarrow & \text{Max} \\ 1 \cdot u_1 + 0 \cdot u_2 & \leq 1 \\ 2 \cdot u_1 + 3 \cdot u_2 & \leq 3 \\ 0 \cdot u_1 + 1 \cdot u_2 & \leq 1 \end{cases}$$



$$Q = 0 = u_1 + 4u_2 \Rightarrow u_2 = -\frac{1}{4}u_1$$

17.05.2021

5.1.1 Bemerkung: Skala für Q, G



- Die Zielfunktionswerte von G für u zulässig in $(3)^D$ bilden untere Schranken für $Q(x)$.

Ebenso: Die "zulässigen" $Q(x)$ bilden obere Schranken für $G(u)$.

Also:

Ist $\overset{*}{x}$ zulässiger Schnittpunkt in (3) \Rightarrow der "zugeordnete" Schnittpunkt $\overset{*}{u}$ kann allgemein nicht(!) zulässig sein in $(3)^D$, da $Q(\overset{*}{x}) = G(\overset{*}{u})$.

(Gilt nur im Opt. bei zulässig.)

Die zugeordneten Schnittpunkte können im Allgemeinen nur in einem Programm zulässig sein.

Betrachtet man also zu $\overset{**}{u}$ (zulässig in $(3)^D$) den zugeordneten Punkt $\overset{**}{x}$, so ist dieser allgemein nicht zulässig in (3).

Der Dualitätssatz

5.2 Satz: starker Dualitätssatz

Besitzt (3) ein (endliches) *Optimum*, so auch $(3)^D$ und umgekehrt. Die *Optima* werden in "zugeordneten" Eckpunkten $\overset{0}{x}, \overset{0}{u}$ angenommen und es gilt also

$$Q_{\min} = Q(\overset{0}{x}) = G(\overset{0}{u}) = G_{\max}.$$

Beweis:

a) " \Rightarrow ":

Nach Satz 4.6 (S.41) gilt:

Hat (3) ein Minimum $\xrightarrow{\text{Satz 4.6}}$ so auch einen *Minimaleckpunkt* $\overset{0}{x}$ mit *Basismatrix* \tilde{A} .

\Rightarrow zu zeigen: $\left[\begin{array}{l} \overset{0}{u} = \tilde{A}^{-T} \tilde{c} \text{ ist dann der zugeordnete Eckpunkt} \\ \text{von } (3)^D \text{ und ist zulässig!} \leftarrow \text{wesentlich (?) zu zeigen!} \end{array} \right.$

$$\text{Sei } \overset{0}{x} = \begin{pmatrix} \overset{0}{x} \\ \hat{x} \\ \overset{0}{x} \end{pmatrix} \begin{array}{l} \rightarrow \text{BV} \\ \rightarrow \text{NBV} \end{array}, A = (\tilde{A}, \hat{A}), c = \begin{pmatrix} \tilde{c} \\ \hat{c} \end{pmatrix}$$

bei geeigneter Umordnung der Spalten

\Rightarrow (3) hat die Form:

$$\begin{array}{l} \tilde{A}\tilde{x} + \hat{A}\hat{x} = b \\ \tilde{x} \geq 0, \hat{x} \geq 0 \end{array}$$

$$\tilde{c}^T \tilde{x} + \hat{c}^T \hat{x} = Q = \text{Min!}$$

Das Dualproblem hat die Gestalt:

$$(\bullet) \quad \begin{pmatrix} \tilde{A}^T \\ \hat{A}^T \end{pmatrix} u \leq \begin{pmatrix} \tilde{c} \\ \hat{c} \end{pmatrix}$$

$$b^T u = G = \text{Max!}$$

(nach entsprechender Umordnung der Zeilen).

Wir nutzen aus, dass $\overset{0}{x}$ Eckpunkt ist: *kanonische* Form von (3) bei $\overset{0}{x}$:

$$\tilde{x} + \tilde{A}^{-1} \hat{A} \hat{x} = \tilde{A}^{-1} b \quad (! (3) \cdot \tilde{A}^{-1}); \tilde{A} : \text{Basismatrix}$$

$$\tilde{x} \geq 0, \hat{x} \geq 0$$

$$Q = \tilde{c}^T \tilde{x} + \hat{c}^T \hat{x}$$

BV ersetzen durch NBV

$$= \tilde{c}^T (\tilde{A}^{-1} b - \tilde{A}^{-1} \hat{A} \hat{x}) + \hat{c}^T \hat{x}$$

$$= \tilde{c}^T \tilde{x}^0 + \underbrace{(\tilde{c}^T - \tilde{c}^T \tilde{A}^{-1} \hat{A})}_{\hat{c}'^T} \hat{x}.$$

Da $\overset{0}{x}$ Minimalpunkt \Rightarrow Nach S.41 *Minimalkriterium* erfüllt
 \Rightarrow (so kann die Basis gewählt werden):

$$\widehat{c}' = \widehat{c} - \widehat{A}^T \widetilde{A}^{-T} \widetilde{c} \geq 0 \Rightarrow \widehat{A}^T \widetilde{A}^{-T} \widetilde{c} \leq \widehat{c}.$$

Es sollte $\overset{0}{u}$ auf Zulässigkeit geprüft werden: Einsetzen von $\overset{0}{u}$ in obiges Restriktionssystem ((•) prüfen):

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \widetilde{A}^T \\ \widehat{A}^T \end{pmatrix} \overset{0}{u} \stackrel{\overset{0}{u} = \widetilde{A}^{-T} \widetilde{c}}{=} \begin{pmatrix} \widetilde{A}^T \\ \widehat{A}^T \end{pmatrix} \widetilde{A}^{-T} \widetilde{c} = \begin{pmatrix} \widetilde{A}^T \widetilde{A}^{-T} \widetilde{c} \\ \widehat{A}^T \widetilde{A}^{-T} \widetilde{c} \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} \widetilde{c} \\ \widehat{c} \end{pmatrix}.$$

$\Rightarrow \overset{0}{u}$ zulässig, ferner ein *Eckpunkt* (als "zugeordnet" zu $\overset{0}{x}$), und es gilt nach Satz 5.1 (S.44, schwacher DS):

$$Q_{\min} = Q(\overset{0}{x}) = G(\overset{0}{u}) \geq G(u) \quad \forall \text{ zulässigen } u.$$

also ist $\overset{0}{u}$ *Maximalpunkt* und

$$Q_{\min} = G_{\max}.$$

b) " \Leftarrow ":

Es besitze $(3)^D$ eine *Maximallösung* (ohne Vorzeichenbeschränkung)

$$\Rightarrow u = \bar{u} - \bar{\bar{u}} \quad \text{mit } \bar{u} \geq 0, \bar{\bar{u}} \geq 0.$$

Werde $\begin{matrix} v \\ \uparrow \\ \text{Schlupfvektor} \end{matrix} = c - A^T u$ gesetzt.

$\Rightarrow (3)^D$ geht in ein LOP(3) über

$$(3)^D : \begin{cases} A^T u \leq c \\ G = \text{Max!} \end{cases} \Rightarrow -A^T u - v = -c \Rightarrow \begin{cases} -A^T \bar{u} + A^T \bar{\bar{u}} - v = -c \\ -G = -b^T \bar{u} + b^T \bar{\bar{u}} = \text{Min!} \\ \bar{u} \geq 0, \bar{\bar{u}} \geq 0, v \geq 0 \end{cases} \quad (*) \text{ Typ: 3 in } R^{m+m+n}$$

- Bildung des zu (*) dualen Problems: ("analog" (•))

$$(*)^D : \begin{pmatrix} -A \\ A \\ -E^{(n)} \end{pmatrix} x \leq \begin{pmatrix} -b \\ b \\ 0^{(n)} \end{pmatrix}, -c^T x = \text{Max!}$$

$$\preceq (-A^T, A^T, -E) \begin{pmatrix} \bar{u} \\ \bar{\bar{u}} \\ \bar{v} \end{pmatrix}, (u = \begin{pmatrix} \bar{u} \\ \bar{\bar{u}} \\ \bar{v} \end{pmatrix})$$

(*) besitzt nach Voraussetzung (da Beweisteil b) eine *Minimallösung*, das Problem $(*)^D$ also eine *Maximallösung*: $\overset{0}{x}$.

- $(*)^D$ ist mit dem Ausgangsproblem LOP(3) gleichbedeutend:

$$\left. \begin{array}{l} Ax \leq b \\ -Ax \leq -b \end{array} \right\} \Rightarrow Ax = b ;$$

$$\left. \begin{array}{l} -E^{(n)} x \leq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow x \geq 0 ;$$

$$c^T x = \text{Min!}$$

also hat dieses LOP(3) einen *Minimaleckpunkt*,
nach a) hat dann auch 3^D einen *Maximaleckpunkt*,
beide sind zugeordnet, die Optima gleich.

5.2.1 Bemerkung

Über (*) hat man $\text{LOP}(3)$ aus $\text{LOP}(3)^D$ zurückerhalten.
 $\text{LOP}(3)$ heißt zu $\text{LOP}(3)^D$ primal.

5.3 Der Existenzsatz

Haben $\text{LOP}(3)$ und $\text{LOP}(3)^D$ zulässige Elemente, so besitzen beide *Optimallösungen* und die *Optimalwerte* sind *gleich*.

(Im Dualitätssatz existenz von Optima vorausgesetzt)

Beweis: Sei $\overset{1}{u}$ zulässig in $\text{LOP}(3)^D \Rightarrow G(\overset{1}{u}) \leq Q(x) \quad \forall x$ zulässig in $\text{LOP}(3)$.

Da $Q(x)$ nach unten beschränkt \Rightarrow Simplexmethode liefert endliches Minimum von Q .

Nach "Dualitätssatz" $\Rightarrow G$ hat ein Max. und beide Optimalwerte sind gleich.

5.3.1 Bemerkung

Die Existenz der Optima tritt stets in beiden dualen Problemen *zugleich* ein, also auch die Nichtexistenz. Dies kann eintreten, wenn

19.05.2021

a) zulässiger Bereich einer LOP-Aufgabe leer.

b) G bzw. Q nicht beschränkt: $G \rightarrow +\infty, Q \rightarrow -\infty$

Es gilt:

	$\text{LOP}(3)$ nicht leer	$\text{LOP}(3)$ leer
$\text{LOP}(3)^D$ nicht leer	Min $Q = \text{Max } G$ (Satz 5.3) (S.48)	$G \rightarrow \infty$
$\text{LOP}(3)^D$ leer	$Q \rightarrow -\infty$	keine Q, G Werte

Beweis:

a) $\text{LOP}(3)$ nicht leer. Dann gilt:

$$\boxed{\text{LOP}(3)^D \text{ leer}} \iff \boxed{Q \rightarrow -\infty.}$$

a1) $Q \rightarrow -\infty$. Würde $\overset{1}{u}$ in $\text{LOP}(3)^D$ zulässig sein

$\Rightarrow G(\overset{1}{u}) \leq Q(x) \quad \forall$ in $\text{LOP}(3)$ zulässen x .

\Rightarrow Widerspruch zu $Q \rightarrow -\infty$.

a2) $\text{LOP}(3)^D$ leer. Wäre $Q \geq \text{konst.}$ auf zulässigem Bereich in $\text{LOP}(3)$, so liefert Simplexalgorithmus Q_{\min} . Also existiert (Dualitätssatz) G_{\max} .

Also $\text{LOP}(3)^D$ nicht leer. Widerspruch.

b) $\text{LOP}(3)^D$ nicht leer.

$$\Rightarrow \boxed{G \rightarrow +\infty} \iff \boxed{\text{LOP}(3) \text{ leer.}}$$

Beweis analog a).

c) Primal- und Dualaufgabe mit je leerem Bereich ist möglich:

$$(3) \quad \begin{array}{rcl} Q = x_1 - x_2 - x_3 & = & \text{Min} \\ x_1 + x_2 - x_3 & = & -1 \\ x_2 - x_3 & = & 0 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 & \geq & 0 \end{array}$$

Es folgt nämlich: $x_1 = -1$,
nicht zulässig, (3) leer.

$$(3)^D \quad \begin{array}{rcl} G = -u_1 + 0 \cdot u_2 & = & \text{Max} \\ u_1 & \leq & 1 \\ u_1 + u_2 & \leq & -1 \\ -u_1 - u_2 & \leq & -1 \end{array}$$

Die letzten beiden Ungleichungen
widersprechen sich. $(3)^D$ leer.

5.4 Beispiel

Primale Aufgabe:

$$x_1 + 2x_2 + x_3 \rightarrow \text{Min}$$

Restriktionen:

$$\begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 - x_3 & = & 3 \\ x_1 + 5x_2 + 2x_3 & = & 6 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 & = & 3 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{array}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Duale Aufgabe:

$$3u_1 + 6u_2 + 3u_3 \rightarrow \text{Max}$$

Restriktionen:

$$\begin{array}{rcl} u_1 + u_2 + 2u_3 & \leq & 1 \\ 2u_1 + 5u_2 + 1u_3 & \leq & 2 \\ -1u_1 + 2u_2 + 3u_3 & \leq & 1 \end{array}$$

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

5.5 Satz: (Folgerung)

(Im Dualsatz " \Rightarrow " nicht gezeigt!)

Ein zulässiges \bar{x} ist
Minimallösung von (3)

\Longleftrightarrow

Es gibt ein zulässiges \bar{u}
von $(3)^D$ mit $Q(\bar{x}) = G(\bar{u})$

\Downarrow

\bar{u} ist dann Maximallösung von $(3)^D$. (analog: $(3)^D \rightarrow (3)$).

Beweis:

I. " \Leftarrow ":

Gilt $Q(\bar{x}) = G(\bar{u})$ für ein \bar{x} und ein \bar{u}
 $\Rightarrow Q(\bar{x}) = G(\bar{u}) \leq Q(x) \quad \forall$ zulässigen x
 $\Rightarrow \bar{x}$ Minimallösung.
 Ebenso ist $G(\bar{u}) = Q(\bar{x}) \geq G(u) \quad \forall$ zulässigen u
 $\Rightarrow \bar{u}$ Maximallösung.

II. " \Rightarrow ":

Ist andererseits \bar{x} Minimallösung
 $\Rightarrow \bar{x}$ als Basislösung eines Minimaleckpunktes existiert.
 \Rightarrow das "zugeordnete" \bar{u} erfüllt obige Bedingungen.

5.6 Einschließungssatz

Kennt man zu $LOP(3)$ und $LOP(3)^D$ einen *zulässigen* Vektor $\overset{1}{x}$ und $\overset{1}{u}$, so gilt

$$G(\overset{1}{u}) \leq G_{\max} = Q_{\min} \leq Q(\overset{1}{x})$$

5.6.1 Bemerkung

Es seien $\overset{0}{x}, \overset{0}{u}$ "zugeordnete" *Schnittpunkte*. Dann gilt für diese stets (S.44 bewiesen)

$$G(\overset{0}{u}) = Q(\overset{0}{x})$$

Sind sie *zulässig* \Rightarrow *Optimallösungen*.

Alternative: Einer von beiden oder beide: unzulässig.

5.7 Praktische Verwendung der Dualitätsbeziehungen

Man geht von einem Problem zum *Dualproblem* über, wenn z. Bsp.

- dort ein *Anfangseckpunkt leicht zu erkennen* ist,
- der *Simplexalgorithmus* voraussichtlich *weniger Schritte* erfordert.

Bemerkung zu b):

- Der *Simplexalgorithmus* eines *Primalprogramms* (PP) geht über die *Ecken von (3)*. [Simplexalgorithmus war am Programmtyp (3) erläutert].
- Der des *Dualprogramms* (DP) über die *Ecken von (3)^D*.
- Projiziert* man über die "Zuordnung" diesen Simplexalgorithmus auf den (PP)-Raum.

\Rightarrow \circ Man läuft über *nicht zulässige* (\leftarrow bei "Zuordnung" ZF-Werte gleich. zul. nur ein Optimum) Schnittpunkte des (PP) (3). $\overset{0}{u} = \tilde{A}^{-T} \tilde{c} \xrightarrow{\tilde{A}} \overset{0}{x} = \tilde{A}^{-1} b$

- \circ Man nähert sich also von *außen* dem zulässigen Bereich des (PP) und *erst* der *Optimalpunkt* ist "primal"-zulässig.

- dualer Simplexalgorithmus**

Die formelmäßige *Rückprojektion* des Simplexalgorithmus von $(3)^D$ mittels der "Zuordnung" führt zum *dualen Simplexalgorithmus des (PP)*⁷.

5.8 Die Dualprogramme für die Typen (1), (2)

- ($LOP(2)$)
$$\begin{array}{rcl} Ax & \geq & b \\ x & \geq & 0 \\ Q = c^T x & = & \text{Min!} \end{array} \quad \begin{array}{l} A : (m, n) - \text{Matrix} \\ b \in \mathbb{R}^m \end{array}$$

Schlupfvariable: $y = (y_1, \dots, y_m)^T \rightarrow$ man erhält ein ($LOP(3)$).

⁷Lit. Werner, J: Numerische Mathematik Bd. 2, Vieweg

$$(*) \quad Ax - y = b, x \geq 0, y \geq 0, Q = c^T x + 0^T y = c^T x = \text{Min!}$$

⇓ Dualität zwischen (3) und (3)^D

$$(*)^{(D)} \quad \begin{pmatrix} A^T \\ -E^{(m)} \end{pmatrix} u \leq \begin{pmatrix} c \\ 0^{(m)} \end{pmatrix}, b^T u = G = \text{Max!}$$

$$(2)^{(D)} \quad A^T u \leq c, u \geq 0, G = b^T u = \text{Max!}$$

Das Programm (2)^D ist wieder vom Typ (2). Schreibt man (2)^D so:

$$(2)^D \quad -A^T u \geq -c, u \geq 0, -G = -b^T u = \text{Min!}$$

⇒

(2)^{DD} hat die Form

$$-Ax \leq -b, x \geq 0, -c^T x = \text{Max}$$

$$\Rightarrow \quad Ax \geq b, x \geq 0, c^T x = \text{Min} \quad ,$$

also:

$$(2)^{DD} = (2).$$

- Hat man ein (LOP(1))

⇒ Das (DP) ist vom Typ 3. (Wie Beweisteil b des Dualitätssatzes)

Dualität zwischen (3)^D und (3)

↓

$$(*) \quad \begin{matrix} Ax \geq b \\ c^T x = \text{Min!} \end{matrix} \quad (1) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{matrix} -Ax \leq -b \\ -c^T x = \text{Max!} \end{matrix} \quad (3)^D \quad \Leftrightarrow \quad \begin{matrix} -A^T u = -c \\ u \geq 0 \\ -b^T u = \text{Min!} \end{matrix} \quad (3) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{matrix} A^T u = c \\ u \geq 0 \\ b^T u = \text{Max!} \end{matrix} \quad (1)^D$$

Übersicht:

	LOP	DP
Typ 1	$Ax \geq b$ $Q = c^T x = \text{Min!}$	$\xrightarrow{(*)}$ $A^T u = c$ $u \geq 0$ (Typ 3) $G = b^T u = \text{Max!}$
Typ 2	$Ax \geq b$ $x \geq 0$ $Q = c^T x = \text{Min!}$	\leftrightarrow $A^T u \leq c$ $u \geq 0$ (Typ 2) $G = b^T u = \text{Max!}$
Typ 3	$Ax = b$ $x \geq 0$ $Q = c^T x = \text{Min!}$	\leftrightarrow $A^T u \leq c$ (Typ 1) $G = b^T u = \text{Max!}$

(*) (S.51)

$$\begin{array}{lcl}
 \begin{array}{l} Ax \geq b \\ c^T x = \text{Min} \end{array} & \Rightarrow & \begin{array}{l} A\bar{x} - A\bar{\bar{x}} - E_m v = b \\ c^T \bar{x} - c^T \bar{\bar{x}} + 0_m v = \text{Min!} \\ \bar{x} \geq 0, \bar{\bar{x}} \geq 0, v \geq 0 \\ \text{(Problem mit} \\ \text{Vorzeichen beschr.)} \end{array} \\
 & & \begin{array}{l} (A, -A, -E_m) \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{\bar{x}} \\ v \end{pmatrix} = b \\ \begin{pmatrix} A \\ -A \\ -E_m \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{\bar{x}} \\ v \end{pmatrix} = b \\ \begin{pmatrix} c^T \\ -c^T \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{\bar{x}} \\ v \end{pmatrix} = \text{Min}; \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{\bar{x}} \\ v \end{pmatrix} \geq 0 \\ \text{(Dual bezüglich (3))} \end{array} \\
 & & \begin{array}{l} b^T u = \text{Max!} \\ A^T u \leq c \\ -A^T u \leq c \\ -E_m^T u \leq 0 \end{array} \quad \Leftarrow \quad \begin{array}{l} b^T u = \text{Max!} \\ (A^T, -A^T, -E_m)^T u \leq (c, -c, 0)^T \end{array} \quad \leftarrow \quad \text{D}
 \end{array}$$

26.05.2021

5.9 Satz von Farkas

Das System

$$Ax = b, x \geq 0 \quad (\text{I})$$

besitzt genau dann *keine* Lösung, wenn das System

$$A^T u \leq 0, b^T u > 0 \quad (\text{II})$$

eine Lösung besitzt.

Beweis: Man betrachte die zueinander dualen linearen Probleme

$$\begin{array}{l} (\text{P}) \\ (\text{LOP}(3)) \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Minimiere } 0^T x \text{ auf } \mathcal{B}_P := \{x \in \mathbb{R}^n : x \geq 0, Ax = b\} \end{array}$$

und

$$\begin{array}{l} (\text{D}) \\ (\text{LOP}(3))^D \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Maximiere } b^T u \text{ auf } \mathcal{B}_D := \{u \in \mathbb{R}^m : A^T u \leq 0\}. \end{array}$$

- Wegen $0 \in \mathcal{B}_D$ ist $\mathcal{B}_D \neq \emptyset$. $(\text{LOP}(3))^D$ nicht leer und $(\text{LOP}(3))$ leer \uparrow S. 48
- (I) hat genau dann *keine* Lösung, wenn \mathcal{B}_P leer ist. Dies ist wegen des *starken Dualitätssatzes* genau dann der Fall, wenn $\sup(D) = +\infty$, was wiederum äquivalent der Existenz einer Lösung von (II) ist.

$$\begin{array}{l} \text{ZF: } b^T u \rightarrow +\infty \\ \text{Restr.: } A^T u \leq 0 \end{array} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} b^T u > 0 \\ A^T u \leq 0 \end{cases} \quad \text{lösbar}$$

5.9.1 Bemerkung

Das *Farkas-Lemma* hat eine schöne *geometrische Interpretation*. Hierzu beachte man, dass das System

$$Ax = b, x \geq 0 \quad (\text{I})$$

genau dann *keine* Lösung besitzt, wenn

$$b \notin K := \{Ax : x \geq 0\}$$

wenn b sich also *nicht* als *nichtnegative Linearkombination* der *Spalten von A* darstellen lässt. Das *Farkas-Lemma* sagt aus, dass aus der Unlösbarkeit von (I) die *Existenz* einer *Lösung* $u \in \mathbb{R}^m$ von

$$A^T u \leq 0, b^T u > 0 \quad (\text{II})$$

folgt. Definiert man mit *diesem* u die Hyperebene

$$H := \{z \in \mathbb{R}^m : u^T z = 0\}$$

durch den Nullpunkt, bezeichnet man ferner mit

$$H^- := \{z \in \mathbb{R}^m : u^T z \leq 0\}$$

einen zugehörigen *Halbraum*, so ist $K \subset H^-$ und $b \notin H^-$. $\leftarrow (b^T u > 0 \text{ wegen (II)} \leadsto b \notin H^-)$
Folgende Abbildung verdeutlicht diese Aussage.

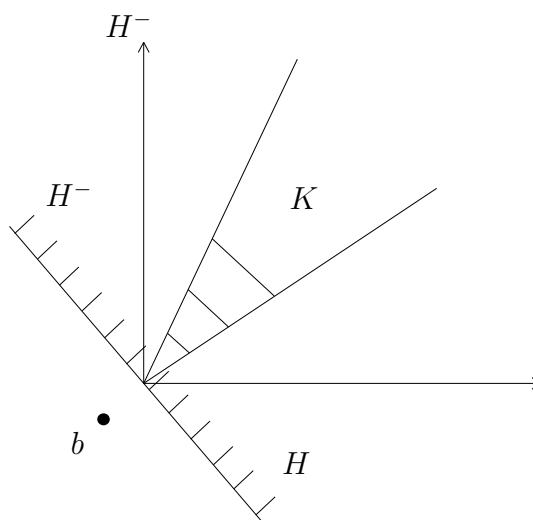


Abbildung: Geometrische Interpretation des Farkas-Lemmas

Folgerung aus dem Satz von Farkas:

5.10 Satz

Ein lineares Ungleichungssystem $Ax \leq b$ ist *genau dann lösbar*, wenn für alle $u \geq 0$ mit $A^T u = 0$ gilt: $b^T u \geq 0$.

Beweis:

$$\bullet Ax \leq b \iff \begin{matrix} Ax + y = b \\ y \geq 0 \end{matrix} \iff \begin{matrix} Ax - Ax + y = b \\ x \geq 0, x \geq 0, \\ y \geq 0. \end{matrix}$$

$$\left. \begin{matrix} (A, -A, E_m) \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ 2 \\ x \\ y \end{pmatrix} = b \\ \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ 2 \\ x \\ y \end{pmatrix} \geq 0 \end{matrix} \right\} (*)$$

• Satz von Farkas \Rightarrow

$$(*) \text{ lösbar} \iff \left. \begin{matrix} \forall u \text{ mit} \\ \text{gilt} \end{matrix} \begin{pmatrix} A^T \\ -A^T \\ E_m \end{pmatrix} u \leq 0 \right\} (+)$$

• (+) entspricht:

$$\left. \begin{matrix} A^T u \leq 0 \\ -A^T u \leq 0 \\ u \leq 0 \end{matrix} \right\} \begin{matrix} A^T u = 0 \\ u \leq 0 \end{matrix} \implies b^T u \leq 0. \xrightarrow{u \rightarrow -u} \left\{ \begin{matrix} A^T u = 0 \\ u \geq 0 \end{matrix} \right\} \implies b^T u \geq 0.$$

Wir kommen nun zu einigen *Alternativsätzen*:

Alternative: Verbindung von Aussagen durch das ausschließende "oder"
("entweder-oder").

Diese Aussagenverbindung ist stets dann wahr, wenn *genau eine* der verbundenen Aussagen *wahr* ist.

5.11 Satz: Lösbarkeit linearer Gleichungssysteme

Entweder besitzt das Gleichungssystem $Ax = b$ eine Lösung oder das Gleichungssystem $A^T u = 0, b^T u = 1$ ist lösbar.

Beweis:

- 1) Zeigen, dass beide Systeme nicht gleichzeitig lösbar sein können.
- 2) Aus Unlösbarkeit des Systems $Ax = b$ folgt Lösbarkeit des Systems $A^T y = 0, b^T y = 1$. (und umgekehrt)

Zu 1) $1 = b^T u = x^T A^T u = x^T 0 = 0$ Widerspruch!

Zu 2) $Ax = b$ nicht lösbar,

$$\begin{aligned} & \Leftrightarrow Ax^1 - Ax^2 = b \text{ nicht lösbar,} \\ & x^1, x^2 \geq 0, \\ & \Leftrightarrow \text{Satz Farkas } \left. \begin{array}{l} A^T u \leq 0 \\ -A^T u \leq 0 \end{array} \right\} A^T u = 0 \\ & \exists u : A^T u = 0 \Rightarrow b^T u > 0, \\ & \Leftrightarrow \\ & \exists u : A^T u = 0, b^T u = 1 \text{ (Normierung!)} \end{aligned}$$

31.05.2021

5.12 Satz: Lösbarkeit linearer Ungleichungen

Entweder ist $Ax \leq b$ lösbar oder $A^T u = 0, b^T u = -1, u \geq 0$ lösbar.

Beweis:

zu 1) $-1 = b^T u \geq x^T A^T u = x^T 0 = 0$ Widerspruch!

zu 2) $Ax \leq b$ nicht lösbar

$$\begin{aligned} & \Leftrightarrow (A, -A, E_m) \begin{pmatrix} x \\ x \\ y \end{pmatrix} = b, \begin{pmatrix} x \\ x \\ y \end{pmatrix} \geq 0 \text{ nicht lösbar} \\ & \Leftrightarrow \text{Satz von Farkas} \\ & \exists u : \left. \begin{array}{l} A^T u = 0 \\ u \leq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow b^T u > 0 \text{ (vgl. (+) S. 54)} \\ & u \rightarrow -u : \exists u \geq 0 : \{A^T u = 0 \Rightarrow b^T u < 0\} \end{aligned}$$

Normierung:

$$\begin{aligned} A^T u &= 0 \\ b^T u &= -1 \quad \text{ist lösbar} \\ u &\geq 0 \end{aligned}$$

5.13 Satz: Nichtnegative Lösungen von lin. Gleichungen

Entweder besitzt das System $Ax = b, x \geq 0$ eine Lösung oder $A^T u \leq 0, b^T u > 0$ ist lösbar.

Beweis:

zu 1.) $0 < b^T u = x^T A^T u \leq x^T 0 = 0$ Widerspruch!

zu 2.) Satz von Farkas anwenden

$$\begin{aligned} & \left. \begin{array}{l} Ax = b \\ x \geq 0 \end{array} \right\} \text{ nicht lösbar} \\ & \Leftrightarrow \exists u : A^T u \leq 0, b^T u > 0. \end{aligned}$$

5.14 Satz: Nichtnegative Lösungen von lin. Ungleichungen

Entweder ist $Ax \leq b, x \geq 0$ lösbar oder $A^T u \geq 0, b^T u < 0, u \geq 0$ besitzt eine Lösung.

Beweis:

$$1) \quad 0 > b^T u \underset{u \geq 0}{\geq} x^T A^T u \underset{x \geq 0}{\geq} x^T 0 = 0 \quad \text{Widerspruch!}$$

$$2) \quad \left. \begin{array}{l} Ax \leq b \\ x \geq 0 \end{array} \right\} \text{ nicht lösbar}$$

$$\Updownarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} (A, E_m) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = b \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{array} \right\} \text{ nicht lösbar}$$

$$\Updownarrow \text{ Satz von Farkas}$$

$$\exists u : \quad A^T u \underset{u \leq 0}{\leq} 0 \text{ und } b^T u > 0$$

$$u \rightarrow -u \quad A^T u \underset{u \geq 0}{\geq} 0 \text{ und } b^T u < 0$$

5.14.1 Bemerkung

Der Satz über nichtnegative Lösungen linearer Gleichungen spielt für das Weitere eine wichtige Rolle.

In diesem Satz ging es um die Existenz nicht-negativer Lösungen linearer Gleichungen. Aus diesem Satz kann man ein (z.B. für die Behandlung der Dualität) wichtiges Ergebnis über *schiefssymmetrische* Matrizen folgern.

Als Vorbereitung dient der folgende Satz:

5.15 Satz

Die Systeme $A^T u \geq 0$ und $Ax = 0, x \geq 0$ besitzen Lösungen $\overset{0}{u}, \overset{0}{x}$ mit $A^T \overset{0}{u} + \overset{0}{x} > 0$.

Beweis: $A = (a_1, \dots, a_n)$

- Für $k = 1, \dots, n$ betrachten wir die Systeme

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n a_i x_i = -a_k, x_i \geq 0 (i \neq k) \quad (i)$$

und

$$a_i^T u \geq 0, i = 1, \dots, n, i \neq k, a_k^T u > 0. \quad (ii)$$

- Nach dem Satz über die Existenz nichtnegativer Lösungen linearer Gleichungen (Satz 5.13, S. 55) ist bei festem k genau eines dieser Systeme lösbar.

- Ist (i) lösbar, so existiert ein Vektor

$$\overset{0}{x}^k \in \mathbb{R}^n \text{ mit } A \overset{0}{x}^k = 0, \\ \overset{0}{x}^k \geq 0$$

dessen k -te Komponente $\overset{0}{x}_k^k = 1$ ist.

- Ist (ii) lösbar, so existiert ein Vektor $\overset{0}{u}^k \in \mathbb{R}^m$ mit $A^T \overset{0}{x}^k \geq 0 \mid A^T \overset{0}{u}^k \leq 0 \mid (-1) \rightarrow A^T \underbrace{(-\overset{0}{u}^k)}_{\overset{0}{u}^k} \geq 0$, für den $a_k^T \overset{0}{u}^k > 0 \mid -a_k^T \overset{0}{u}^k > 0 \leadsto a_k^T (-\overset{0}{u}^k) > 0$ ist.
- Die Indizes K , für die (i) lösbar ist, wurden zu einer Indexmenge I_1 zusammengefasst. Diejenigen, für die (ii) lösbar ist, zu einer Indexmenge I_2 .

Es ist

$$I_1 \cup I_2 = \{1, \dots, n\}, \quad (\text{genau eines dieser Systeme lösbar}) \\ I_1 \cap I_2 = \emptyset$$

Setzt man

$$\overset{0}{x} = \sum_{k \in I_1} \overset{0}{x}^k, \\ \overset{0}{u} = \sum_{k \in I_2} \overset{0}{u}^k, \text{ so wird}$$

$$A^T \overset{0}{u} \geq 0, \quad A \overset{0}{x} = 0, \quad \overset{0}{x} \geq 0, \quad \searrow \text{jeweils } k\text{-te Komp. } > 0 \swarrow \\ A^T \overset{0}{u} + \underset{\text{od. } \uparrow = 1 > 0}{\overset{0}{x}} > 0.$$

5.16 Satz

Sei A schiefsymmetrisch ($A^T = -A$).

Dann existiert ein Vektor $x \in \mathbb{R}^n$ mit

$$Ax \geq 0, \quad x \geq 0, \quad Ax + x > 0.$$

Beweis: Wir betrachten die Systeme (\uparrow Satz 5.15)

$$(A^T) \quad \begin{array}{c} \downarrow A^T = -A \\ \boxed{\begin{pmatrix} A \\ E_n \end{pmatrix} y \geq 0} \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{c} \downarrow A \\ \boxed{(-A, E_n) \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} = 0} \end{array}, \quad \boxed{\begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} \geq 0}.$$

Nach Satz 5.15 (S. 56) existieren Lösungen $\overset{0}{y}, \overset{0}{w}, \overset{0}{z}$ mit

$$\overset{0}{y} \geq 0, A\overset{0}{y} \geq 0, -A\overset{0}{w} + E_n\overset{0}{z} = 0, \overset{0}{w} \geq 0, \overset{0}{z} \geq 0$$

und $\boxed{A\overset{0}{y} + \overset{0}{w} > 0, \overset{0}{y} + \overset{0}{z} > 0.}$ (Wegen Satz 5.15 S. 56)

Wegen $\overset{0}{z} = A\overset{0}{w} \Rightarrow \overset{0}{y} + A\overset{0}{w} > 0.$

Setzen $\overset{0}{x} = \overset{0}{y} + \overset{0}{w} \Rightarrow$

- $A\overset{0}{x} = A\overset{0}{y} + A\overset{0}{w} \geq A\overset{0}{w} = \overset{0}{z} \geq 0.$

- $\overset{0}{x} \geq 0$ $\nwarrow \nearrow \overset{0}{x}$ erfüllt im Satz genannte Systeme

- $A\overset{0}{x} + \overset{0}{x} = A\overset{0}{y} + A\overset{0}{w} + \overset{0}{y} + \overset{0}{w}$
 $= A\overset{0}{y} + \overset{0}{w} + \overset{0}{y} + A\overset{0}{w} > 0.$

5.16.1 Folgerung: (A jetzt wieder beliebig)

Das System linearer homogener Ungleichungen

$$\begin{aligned} -Ax + t \cdot b &\geq 0 & y &\geq 0 \\ +A^T y - t \cdot c &\geq 0 & x &\geq 0 \\ -b^T y + c^T x &\geq 0 & t &\geq 0 \text{ (t skalar)} \end{aligned}$$

hat mindestens eine Lösung $\overset{0}{y}, \overset{0}{x}, \overset{0}{t}$ derart, dass

$$\begin{aligned} -A\overset{0}{x} + \overset{0}{t} \cdot b + y_0 &> 0 \\ A^T \overset{0}{y} - \overset{0}{t} \cdot c + x_0 &> 0 \text{ und } \begin{pmatrix} \overset{0}{y} \\ \overset{0}{x} \\ \overset{0}{t} \end{pmatrix} \geq 0 \\ -b^T \overset{0}{y} + c^T \overset{0}{x} + \overset{0}{t} &> 0 \end{aligned}$$

gilt.

Beweis: Folgt aus Satz 5.16

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -A & +b \\ +A^T & 0 & -c \\ -b^T & +c^T & 0 \end{bmatrix}}_{\text{schiefsymmetr. Matrix}} \begin{bmatrix} y \\ x \\ t \end{bmatrix} \geq 0$$

6 Ökonomische Interpretation der Dualität

6.1 Produktionsplanungsmodell

Unter *Kapazitätsbeschränkungen* an benötigten *Hilfsmitteln* will ein Betrieb einen Produktionsplan aufstellen, der *maximalen Gesamtgewinn* liefert

$$\begin{array}{l} \Rightarrow \text{LOP:} \\ \Rightarrow \text{LOP(2)} \end{array} \quad \boxed{Q = c^T x \rightarrow \text{Max}} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{l} {}^{(2)} \\ -c^T x \rightarrow \text{Min} \\ x \geq 0 \\ -Ax \geq -b \end{array} \quad \begin{array}{l} \Downarrow \\ {}^{(2)^D} - A^T u \leq -c \\ u \geq 0 \\ -b^T u \rightarrow \text{Max} \end{array}$$

\Rightarrow Das hierzu *duale* Programm:

$$\text{LOP(2)}^D \quad \boxed{G = b^T u \rightarrow \text{Min}} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{l} b^T u \rightarrow \text{Min} \\ u \geq 0 \\ A^T u \geq c. \end{array} \quad \begin{array}{l} \Downarrow \\ {}^{(2)^D} - A^T u \leq -c \\ u \geq 0 \\ -b^T u \rightarrow \text{Max} \end{array}$$

Interpretation des dualen Programms:

Ein *Konkurrent* macht dem Betrieb das Angebot, *alle* m Hilfsmittel zu *mieten* bzw. zu *kaufen* und bietet hierzu für das i -te Hilfsmittel $u_i \geq 0$ Geldeinheiten pro Einheit. Insgesamt sind seine *Kosten* $\sum_{i=1}^m b_i u_i$ und diese wird er versuchen zu *minimieren*. Der Betrieb geht auf diesen Vorschlag nur ein, wenn

$$\boxed{\sum_{i=1}^m a_{ij} u_i \geq c_j} \quad (j = 1, \dots, n),$$

d.h., wenn der gezahlte *Preis* für sämtliche *Hilfsmittel* zur *Produktion einer Einheit* des j -ten Produktes *nicht kleiner* ist, als der *Reingewinn* c_j , den der Betrieb erhalten hätte, wenn er die Produktion selbst durchführen würde.

Der *Konkurrent* hat also genau das *duale Problem* zu lösen.

- Interpretation des *schwachen Dualitätssatzes*:

Ist $x \in \mathbb{R}^m$ ein *zulässiger* Produktionsplan für den Betrieb und $u \in \mathbb{R}^m$ ein *akzeptables* Angebot des Konkurrenten, so ist

$$c^T x \leq b^T u.$$

D.h., der Betrieb kann keinen größeren *Reingewinn* machen, als den Betrag, den er bei einem *akzeptablen Angebot* vom Konkurrenten erhalten würde (er erspart sich sogar die Suche nach einem optimalen Produktionsplan).

- Interpretation des *starken Dualitätssatzes*:

Der *maximale Reingewinn* des Betriebs ist gleich den *minimalen Kosten* des Konkurrenten (wenn zulässige Produktionspläne und akzeptable Angebote existieren).

- Aussage des Satzes:

Ist x^* ein *optimaler, zulässiger Produktionsplan*, mit einem Reingewinn $c^T x^*$, so gibt es ein für den *Konkurrenten optimales, zulässiges Angebot* mit den Kosten

$$b^T u^* = c^T x^*.$$

$$\begin{array}{ccc} \forall x, u \text{ zul.} & & \\ \frac{c^T x \leq (A^T u)^T x = u^T A x \leq u^T b}{\begin{array}{c} \nwarrow \nearrow \\ A^T u \geq c \end{array}} & & \begin{array}{c} \nwarrow \nearrow \\ A x \leq b \end{array} \end{array}$$

Notwendigerweise gelten die *Gleichgewichtsbedingungen*

$$(*) \quad (A^T u^* - c)^T x^* = 0, \quad (b - A x^*)^T u^* = 0.$$

- Wird in einem *optimalen Produktionsplan* x^* das j -te Produkt hergestellt, ist also

$$x_j^* > 0,$$

so ist notwendig $(A^T u^*)_j = c_j$.

- Wird die *Kapazitätsbeschränkung* für das i -te Hilfsmittel in einem optimalen Produktionsplan *nicht* voll ausgeschöpft, ist also

$$(A x^*)_i < b_i,$$

so ist notwendig $u_i^* = 0$, der Konkurrent wird daher in einem für ihn optimalen Angebot für das i -te Hilfsmittel nichts zahlen.

- Ähnliche Interpretation des dualen Problems und der Dualitätsaussagen ist für viele Probleme aus den Wirtschaftswissenschaften möglich.
- Weitere *Interpretation* der Lösung des dualen Programms:
Geg.: LOP vom Typ 3

$$(PP) \quad \begin{array}{l} Q = c^T x \rightarrow \text{Min} \\ x \geq 0 \\ Ax = b, \end{array} \quad x \in \mathbb{R}^n$$

$$\text{Rang}(A) = m.$$

Annahme: Simplexverfahren bricht mit einem nichtentarteten *optimalen, zulässigen Basislösung* x^* zur Basis \tilde{A} ab,

$$BV: \quad \tilde{x}^* := \tilde{A}^{-1} b \quad \text{sei positiver Vektor.}$$

Bekannt (Dualitätssatz):

$$u^* = \tilde{A}^{-T} \tilde{c}$$

ist Lösung des dualen Problems

$$(DP) \quad \begin{array}{l} b^T u \rightarrow \text{Max} \\ A^T u \leq c \\ u \in \mathbb{R}^m. \end{array}$$

Ist $\Delta b \in \mathbb{R}^m$ eine so kleine *Störung* von b , dass noch $\tilde{A}^{-1} \cdot (b + \Delta b) \geq 0$, so ist:

$$\begin{array}{c} 0 \\ x \end{array} := \begin{pmatrix} \tilde{A}^{-1}(b + \Delta b) \\ 0 \end{pmatrix}$$

eine *optimale, zulässige Basislösung* des *gestörten Problems*

$$\begin{array}{ll} Q = c^T x & \rightarrow \min \\ x & \geq 0 \\ Ax & = b + \Delta b. \end{array}$$

Dies folgt einfach aus dem *schwachen Dualitätssatz*, wenn man

$$c^T x = \overset{(\tilde{A}^{-T} \tilde{c})^T}{\tilde{c}^T} \underset{\downarrow}{\tilde{A}^{-1}} (b + \Delta b) = (b + \Delta b)^T \underset{\downarrow}{u^*}$$

berücksichtigt.

Insbesondere ist

$\downarrow \swarrow x^*$ Lsg. d. Ausgangsprobl. u. DS

$$c^T x^0 = c^T x^* + (u^*)^T \Delta b$$

für alle hinreichend kleinen Δb .

Die Lösung u^* des *dualen Programms (DP)* zum ungestörten Programm (PP) bestimmt daher die *Sensitivität* des Wertes des Ausgangsprogramms gegenüber *Störungen der rechten Seite* b . $\{u_i^* = 0 \Rightarrow \text{Änderung v. } b \text{ bewirkt nichts!}\}$

In den Wirtschaftswissenschaften nennt man u^* den Vektor der *Schattenpreise*.

7 Das Transportproblem

Das einfache klassische *Modell*:

An m verschiedenen *Lagerplätzen* lagern die Mengen $a_i > 0$ ($i = 1, \dots, m$) eines Produkts, an n Orten herrscht der *Bedarf* $b_j > 0$ ($j = 1, \dots, n$).

Es sei Gesamtlager = Gesamtbedarf: $\sum_i a_i = \sum_j b_j$

x_{ij} : Transport der Menge x_{ij} vom Lager i zum Ort j . $x_{ij} \geq 0$.

c_{ij} : Transportkosten der Mengeneinheit vom Lager i zum Ort j .

Problem:

Bei *minimalen Kosten* das Lager zu räumen und den Bedarf vollständig zu befriedigen.

$$Q = \sum_{ij} c_{ij} x_{ij} = \text{Min!} \quad \text{wobei} \quad \sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, \quad \sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j$$

$$= c^T x = \text{Min!} \quad \text{wobei} \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n$$

$$x = (x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1n}, x_{21}, \dots, x_{mn}) \in \mathbb{R}^{m \cdot n}, \text{ entsprechend } c = \dots$$

Restriktionen: $Ax = b$

$$b = (a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^{m+n}$$

$$A = (m+n, m \cdot n) \quad (! \text{ sehr groß})$$

Man erhält ein LOP(3):

$$\{Q \mid Q = c^T x, Ax = b, x \geq 0\} = \text{Min!}$$

Gestalt von A:

$$A = \left(\begin{array}{c|c|c|c} 1 \dots 1 & 1 \dots 1 & \dots & 1 \dots 1 \\ \hline 1 \dots 1 & 1 \dots 1 & \dots & 1 \dots 1 \end{array} \right) \left. \begin{array}{l} \} m \sum_{j=1}^n x_{1j} = a_1 \\ \} n \sum_{i=1}^m x_{i1} = b_1 \end{array} \right\}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{m \text{ Blöcke}}$

Infolge der einfachen (und bei Transportproblemen stets gleichen) Gestalt (und infolge der Größe) hofft man, den Simplexalgorithmus zu *vereinfachen*.

Eigenschaften von A

$$1. \quad r(A) = m + n - 1$$

[illegible]

- Det entsteht aus A_i
- Spalten 1 bis $n - 1$ im Block 2 bis m gestrichen
- letzte Zeile gestrichen!
- Insgesamt hat A $m + n$ Zeilen, aber es gilt $[A = (a_{rs})]$

$$\boxed{\sum_{r=1}^m a_{r\textcolor{teal}{s}} - \sum_{r=m+1}^{m+n} a_{r\textcolor{teal}{s}} = 0} \quad \forall s=1, \dots, n \cdot m$$

7.0.1 Bemerkung

Die Gleichungen $Ax = b$ sind also genau dann *lösbar*, wenn die *rechten Seiten dieselbe Abhängigkeit* zeigen:

$$\sum_{i=1}^m a_i - \sum_{j=1}^n b_j = 0$$

Das ist gerade *erfüllt*.

- (:) Wegen (•) ist *jede* Zeile in den anderen linear darstellbar, wir *streichen in A die letzte*. (Dies liefert \bar{A} ., entsprechend statt b : \bar{b}). ($\text{rang } A = m+n-1$)
 \Rightarrow Das Transportproblem ist nun vom *Typ 3* mit *regulärer* Matrix:

$$\bar{A}x = \bar{b}, x \geq 0, Q = c^T x = \text{Min!}$$

2. *Matrix von Δ hat nach Spaltenvertauschung Dreiecksgestalt.* Es gilt sogar:

7.1 Satz

Jede Matrix von Basisspaltenvektoren (Basismatrix) von \bar{A} hat (bei geeigneter Anordnung von Zeilen und Spalten) Dreiecksgestalt.

7.1.1 Bemerkung

Das bedeutet, setzt man in $\bar{A}x = \bar{b}$ alle *NBV Null*, so entsteht für die *BV* ein Gleichungssystem mit *Dreiecksgestalt* (ev. Umordnung!)

Beweis: In $Ax = b$ streichen wir die NBV. Es bleiben die Gleichungen für die BV übrig! Jede dieser Gleichungen muss ein BV enthalten: Es wären sonst in einer Gleichung alle Koeffizienten 0 \rightarrow da diese Zeile (da (:)) aus den übrigen linear kombinierbar ist, wären die übrigen *linear abhängig*; Widerspruch zu: "Basisordnung".

Wir gehen wieder zu $\bar{A}x = \bar{b}$,

und schreiben $\bar{A}x = \bar{b}$ in Form eines 'magischen Rechtecks':

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & & & \text{weglassen} \swarrow & & & \\
 x_{11} & + & x_{12} & + & \dots & + & x_{1n-1} & + & x_{1n} & = & a_1 \\
 & + & & + & & & & + & & + & \\
 x_{21} & + & x_{22} & + & \dots & + & x_{2n-1} & + & x_{2n} & = & a_2 \\
 & + & & + & & & & + & & + & \\
 (*) & \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & & \\
 & + & & + & & & & & & & \\
 x_{m1} & + & x_{m2} & + & \dots & + & x_{mn-1} & + & x_{mn} & = & a_m \\
 \parallel & & \parallel & & & & \parallel & & \parallel & & \\
 b_1 & & b_2 & & & & b_{n-1} & & b_n & &
 \end{array}$$

7.1.2 Bemerkung

Eine der Zeilen- oder Spaltengleichungen enthält nur *eine* BV.
Sonst müssten alle wenigstens 2 BV (und die)

09.06.2021

3. Sind die a_i, b_j ganzzahlig, so auch die Werte der BV.

4. *Simplexmultiplikatoren:*

Betrachten (LOP (3)): $Q = c^T x \rightarrow \text{Min!}$

$$Ax = b$$

$$x \geq 0$$

$A : (m, n)$ -Matrix, $\text{Rang } A = m, x^0 \text{ BL.}$

Seien $\Pi = (\Pi_1, \dots, \Pi_m)^T$, \tilde{x} Vektor der BV.
 \hat{x} Vektor der NBV.

Bestimmungsgleichung für die x^0 zugeordneten Simplexmultiplikatoren:

$\Pi = \tilde{A}^{-T} \tilde{c}$ heißt Vektor der *Simplexmultipkatoren*: Entspricht der Bestimmungsgleichung für den $\overset{0}{x}$ zugeordneten *Schnittpunkt* in Kapitel 5 (Dualität).

Optimalitätskriterium: Ist für eine BL $\tilde{c}^T - \Pi^T \hat{A} \geq 0$ erfüllt
 \Rightarrow Für diese BL wird *Minimum* angenommen

Sei $\Pi^T = (u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_{n-1})$ der Vektor der *Simplexmultiplikatoren*. Dann muss sein $Q - Q^0 = Q - \sum_{u_i a_i} - \sum_{v_j b_j}$

Sei x_{ij} Basisvariable. Die Bedingung für Simplexmultiplikatoren liefert:

(\sim) hat *Dreiecksgestalt!* (Eig. 4.)
 Wenn die u_i, v_j *ganzzahlig* sind ("Dreicksauflösung") $\rightarrow c'_{ij}$ *ganzzahlig*.
 Zur Basis gehört folgendes *kanonisches System*:

$$\begin{array}{l}
\rightarrow \\
(\diamond) \rightarrow
\end{array}
\begin{array}{c}
\boxed{
\begin{array}{rcl}
\widetilde{A}\widetilde{x} & + \widehat{A}\widehat{x} & = \bar{b} \\
\widetilde{x} & + \widetilde{A}^{-1}\widehat{A}\widehat{x} & = \widetilde{A}^{-1}\bar{b} \\
\widetilde{x} & + \widehat{A}'\widehat{x} & = \bar{b}'
\end{array}
}
\end{array}$$

$\downarrow \qquad \downarrow$
 erscheinen im Simplextableau

$\bar{b}' = \widetilde{x}'$ Wert der \widetilde{x} für $\widehat{x} = 0$, Ecke.

(Das System (Berechnung der BV! \rightarrow) $\widetilde{A}\bar{b}' = \bar{b}$ ist dreieckig)

$\widetilde{A}\widehat{A}' = \widehat{A}$ ist System für \widehat{A}' . Die Spalten von \widehat{A}' berechnen sich aus demselben System wie \bar{b}' , wenn man \bar{b} durch die Spalten von \widehat{A} ersetzt!

Behauptung:

Die Matrix \widehat{A}' im kanonischen System enthält nur die Zahlen 0, 1, -1
 (da Determin. unimodular ist)

Beweis:

(*) Seite 64 entspricht dem System mit Matrix \widetilde{A}' : $\widetilde{A}\widetilde{A}' = \widehat{A}$.

Die Spalten von \widehat{A} enthalten 0...1...0 in den ersten m Zeilen,
 0...1...0 in den zweiten $n-1$ Zeilen.

Dreiecksauflösung (wie unter (*))!

In der Lösung tritt höchstens auf: 0, 1, -1.

14.06.2021

7.3 Das Simplexverfahren beim Transportproblem

- Es sei eine *Basis* (ein Eckpunkt) *gegeben*. Die zugehörigen BV werden durch *Eintragung* ihrer Werte in eine x_{ij} -Tabelle markiert, diese Tabelle sei dem "magischen Rechteck" nachgebildet.
- Dazu wird eine "gleichgroße" Tabelle der c_{ij} (gerändert mit den entsprechenden Simplexmultiplikatoren $u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_n$) erstellt, wobei die c_{ij} aus der gegebenen Zielfunktion an die BV-Plätze angeschrieben werden.

$x_{ij} : (\text{insges. } m + n - 1)$					$c_{ij} :$						
x_{12}		$x_{1,n}$			a_1	c'_{11}	c_{12}	c'_{13}	\dots	c_{1n}	u_1
x_{12}	x_{23}				a_2	c_{21}	c'_{22}	c_{23}	\dots	c'_{2n}	u_2
					\vdots						\vdots
		x_{m3}	x_{mn}		a_m	c'_{m1}	c'_{m2}	c_{m3}	\dots	c_{mn}	u_m
b_1	b_2	b_3	\dots	b_n	a_i	v_1	v_2	v_3	\dots	v_n	u_i
					b_j						v_j

- Von selbst ergibt sich: ((\sim) S.65): Die u_i, v_j lassen sich durch Dreiecksauflösung aus

$$\boxed{u_i + v_j = c_{ij}} \quad \leftarrow \text{Bestimmungsglg. der Simplex.mult.}$$

$n + m - 1$ Gleichungen für $n + m$ Variablen
 für *eingetragene* c_{ij} , $v_n = 0$! (sukzessive) berechnen.
 \nwarrow eine belieb. setzen (wegen Zeilen abhäng.)

- Jetzt werden die c'_{ij} berechnet: (vgl. S. 65) (?)

$$c'_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j \quad \leftarrow \text{charakt. Zeile bei Simplexmethode}$$

und in die c'_{ij} -Tabelle eingetragen: (c'_{12}) heißt "0", da $c'_{12} = 0$ für x_{12} Basisvariablenstelle.

→ Wegen S. 65 ($Q - Q^0$) liefern beide Tabellen *dieselbe Information* wie das *Simplextableau*

→ jetzt ist MIN-Test auszuführen.

→ *MINIMUMTEST*: MIN erreicht $\xleftarrow{\text{ja}} \boxed{c'_{ij} \geq 0} \xrightarrow{\text{nein}}$ Basisübergang.

→ *Basisübergang*: $\min_{i,j} c'_{ij} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{alte NBV}}}{c'_{st}}$ Es wird x_{st} *neu* in die *Basis* eingeführt.

Dazu wachse x_{st} auf $x'_{st} = \delta \geq 0$. (vgl. Simplexalgorithmus Auswahl Pivotelement)
 Da (S. 66, (\diamond))

$$\tilde{x} + \tilde{A}^{-1} \hat{A} \tilde{x} = \tilde{b}'$$

gelten muss, berechnet man die *Änderungen* der *alten BV-Werte*: *so dass Zeilen- u. Spaltensummen erhalten bleiben*

$$(\tilde{x} + \Delta \tilde{x}) + \hat{A}'_{|\text{Spalte } st} \cdot \delta = \tilde{b}'.$$

eindeut. Zyklus, so dass Zeilen auf Spaltensumme gleich!

Diese *Spalte* enthält nur die Zahlen $0, 1, -1$.

Da: $\underset{\substack{\downarrow \\ \text{alte BV}}}{\tilde{x}} = \tilde{b}' \Rightarrow \boxed{\Delta \tilde{x} + \hat{A}'_{|\text{Spalte } st} \cdot \delta = 0},$

also: $\Delta \tilde{x}$ kann nur $0, +\delta, -\delta$ in seinen Komponenten enthalten. Diesen System wird von der x_{ij} Tabelle dargestellt, wenn $x_{st} = \delta$ (\leftarrow Stelle) eingetragen ist:

Man findet die $\Delta \tilde{x}$ durch Dreiecksauflösung, da

(rechte Seite Null!)

$$\tilde{A} \Delta \tilde{x} + \hat{A} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \delta \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

Dreiecksgestalt hat und das *homogene* Gleichungssystem bezüglich der x_{ij} -Tabelle ist.

→ • Bestimmung von δ : $\tilde{x} + \Delta\tilde{x} \geq 0$ bleibe, jedoch mindestens eine Komponente neu verschwinde.

Dann ist natürlich eine neue Ecke erreicht:

Wir suchen also:

$$\begin{array}{|c|} \hline \text{Min } (x_{ij}) = x_{\delta\tau} \\ \text{mit } \Delta\tilde{x}_{ij} = -\delta \\ \hline \end{array} \quad \leftrightarrow \quad \begin{array}{|c|} \hline \text{Festlegung von } \delta \text{ (} \leftarrow \text{Wert):} \\ \hline \delta = x_{\delta\tau} \\ \hline \end{array}$$

⇒ Anlegen einer neuen x_{ij} -Tabelle, in die die neuen BV eingetragen werden.

• Neu in der Basis: $x'_{st} = \delta$. BV (neu)

• Herausgenommen: $x_{\delta\tau}$

Im Algorithmus sind wir wieder an der Stelle, die zugehörige c'_{ij} -Tabelle aufzustellen.

• Tritt bei Basisvariablen der Wert 0 auf (er wird natürlich ebenso eingetragen), so liegt *Entartung* vor.

Kreisen ist denkbar.

Man beweist⁸, dass der *Entartungsfall* durch Störungsrechnung (\leftarrow Entartung) zu beheben ist.

• Der Simplexalgorithmus führt stets zu einem *endlichen Minimum*, denn der zulässige Bereich ist stets *nichtleer* und *beschränkt*:

Da $\sum a_i > 0, \sum b_j > 0 \Rightarrow \sum a_i = \sum b_j = p > 0$.

$$x_{ij} = \frac{a_i b_j}{p} \quad (i = 1, \dots, m \quad j = 1, \dots, n)$$

ist zulässige Lösung:

$$\sum_j x_{ij} = \sum_j \frac{a_i b_j}{p} = \frac{a_i}{p} \sum_j b_j = \frac{a_i}{p} \cdot p = a_i$$

$$\sum_i x_{ij} = \sum_i \frac{a_i b_j}{p} = b_j$$

Die *Beschränktheit* des Bereiches:

$$0 \leq x_{st} \leq \sum_j x_{sj} = a_s \quad (s, t \text{ bel.})$$

Es bleibt noch die Bestimmung eines "guten" Anfangseckpunktes.

16.06.2021

Die in der letzten Vorlesung dargestellten theoretischen Schritte zum Simplex-Algorithmus für Transportprobleme der Form

$$\begin{array}{l} c^T x \rightarrow \text{Min} \\ \overline{A}x = \overline{b} \\ x \geq 0 \end{array}$$

sollen jetzt durch ein *Beispiel illustriert* werden:

⁸Dantzig, S.351, Lin. Progr. und Erweiterungen

7.4 Beispiel zum Transportproblem

$$b = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad c_{ij} : \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 5 & 2 & 3 \\ \hline 0 & 1 & 3 & 2 \\ \hline 2 & 0 & 1 & 2 \\ \hline \end{array}$$

$$m = 3, n = 4, m + n - 1 = 6$$

⇒ Eine Basislösung muss mindestens $m \cdot n - (m + n - 1)$ verschwindende Variable haben:

Im Beispiel: $3 \cdot 4 - (3 + 4 - 1) = 6$

Wir tragen jetzt die *Basisvariablen* in ein Tableau ein, das dem "magischen Rechteck" nachgebildet ist.

Dazu verwenden wir die "Nordwesteckenregel" und deklarieren x_{11} als *Basisvariable*:

1. Basislösung (entartet): "Nordwesteckenregel"

$$x_{ij} :$$

$2+0$	$4-\delta$		δ	6
	$0+\delta$	$2-\delta$		2
		$1+\delta$	$1-\delta$	2
2	4	3	1	a_i b_j

Aus den Bedingungen für die Simplexmultiplikatoren wissen wir:

$$\begin{cases} \bullet u_i + v_j = c_{ij} \\ \bullet c'_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j \end{cases}$$

An den Basisvariablen-Plätzen tragen wir die c_{ij} ein:

$$c_{ij}' :$$

①	⑤	-5	-5	8
3	①	③	-2	4
7	1	①	②	2
-7	-3	-1	0	u_i v_j

(c_{ij}') -Tabelle gerändert mit den Simplexmultiplikatoren "○" bedeutet = 0 in c_{ij}' -Tab.

↑ Beginn: $v_4 \stackrel{!}{=} 0$ setzen

Minimumstest: ①nein

$\min_{i,j} c_{ij}' = -5 \curvearrowright \delta$ einführen: δ

$\min(x_{ij} - \delta) = 1 - \delta = x_{34} - \delta \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow \delta = 1$

Jetzt: Neue BV-Tabelle aufschreiben und nächste Iteration durchführen:

Übungsaufgabe

⇒ Theoretische Beschreibung:

7.5 Bestimmung einer Anfangsbasislösung (Anfangseckpunkt) (Nordwesteckenregel)

- Eine *Basislösung* müsste $\underbrace{n \cdot m}_{\text{Var. Zahl}} - \underbrace{(n + m - 1)}_{\text{Rang}}$ Nullen (mindestens) enthalten.
- Fände man eine Lösung x_{ij} (*zulässig*) mit $n \cdot m - (n + m - 1)$ Nullen und ließe sich das Gleichungssystem

$$\begin{aligned}\bar{A}x &= \bar{b} \\ c^T x &= Q = \text{Min}, x \geq 0\end{aligned}$$

nach den *restlichen* $n + m - 1$ eindeutig ausflösen (\rightarrow Koeff. det.: *Rang* $n + m - 1$), so hat man eine *BL*.

- Um das zu erzeugen (dies ist insbesondere gesichert, wenn Dreiecksauflösung vorliegt), wird x_{11} als *BV* deklariert.

Dazu: Falls

- $$\left. \begin{array}{l} 1) a_1 \leq b_1 : \text{ die restl. Zeile } x_{12}, x_{13}, \dots, x_{1n} \\ 2) a_1 > b_1 : \text{ die restl. Spalte } x_{21}, x_{31}, \dots, x_{m1} \end{array} \right\} \text{ als NBV}$$

Jetzt errechnet sich x_{11} (\rightarrow Wert der BV x_{11}) zu 1) a_1 oder 2) b_1 $\text{Min}(a_1, b_1)$.

Jedenfalls ist $x_{11} = a_1$ oder b_1 *zulässig*. (Da a_1 oder b_1 beide > 0).

- Wir setzen den Wert von x_{11} in $\left\langle \begin{array}{l} a_1 \leq b_1 \text{ 1) } \text{1. Spalte} \\ a_1 > b_1 \text{ 2) } \text{1. Zeile} \end{array} \right\rangle$ ein und bringen ihn
 $\left\langle \begin{array}{l} \text{1) auf die untere Seite} \\ \text{2) auf die rechte Seite} \end{array} \right\rangle$ und *streichen* die $\left\langle \begin{array}{l} \text{1. Zeile} \\ \text{linke Spalte} \end{array} \right\rangle$

- Die x_{ij} -Tabelle mit gestrichener $\left\langle \begin{array}{l} \text{1. Zeile} \\ \text{linken Spalte} \end{array} \right\rangle$ beschreibt die restlichen Gleichungen *vollständig*.

Es bleiben $n + m - 2$ restliche Gleichungen. Die reduzierte Tabelle hat *dieselbe* Struktur wie die ursprüngliche!

Die "rechten" und "unteren" Seiten sind nämlich weiterhin nichtnegativ: Wegen Wahl der Vorzeichen in 1) und 2).

- *Wiederholung der Prozedur der Nordwesteckenregel* mit dem reduzierten Schema. Das Verfahren endet in folgender Alternative:

- a) Es ist nur noch die letzte Zeile da:

$$\begin{aligned}\text{Fälle: 1) } a_1^* &\leq b_1^* \\ 2) a_1^* &> b_1^*\end{aligned}$$

ANFANG hier keine Gl. ↓ ↓ $a_1 > b_1$

x_{11}	x_{12}	\dots	x_{1n-1}	x_{1n}	a_1	b_1	$= a_1^*$
x_{21}	x_{22}	\dots	x_{2n-1}	x_{2n}	a_2		$= a_2^*$
\vdots	\vdots		\vdots	\vdots	\vdots		
x_{m1}	x_{m2}	\dots	x_{mn-1}	x_{mn}	a_m		$= a_m^*$
b_1	b_2	\dots	b_{n-1}	b_n	$\sum' b_j^*$	$<$	$\sum a_i^*$

$\overset{||}{b_2^*} \qquad \qquad \overset{||}{b_{n-1}^*} \qquad \qquad \downarrow$

stets da $b_n > 0$ stets fehlt

* D. i. ein Gleichungssystem ($n \cdot s$ senkrecht, 1 waagrecht)

$$\begin{array}{c|c}
 \begin{array}{ccc} x_{ms} & \dots & x_{mn} \\ \hline b_s^* & \dots & \del{b_n} \end{array} & \begin{array}{c} a_m^* \\ \hline \sum_s b_j^* < a_m^* \end{array}
 \end{array}
 \Leftrightarrow \text{als BV: } \begin{cases} x_{ms} = b_s^*, \dots, x_{m,n-1} = b_{n-1}^* \\ x_{mn} = a_m^* - x_{ms} - \dots - x_{mn-1} > 0 \end{cases}$$

b) oder die letzte Spalte:

$$\begin{array}{c|c}
 x_{tn} & a_t^* \\
 \vdots & \vdots \\
 x_{mn} & a_m^* \\
 \hline
 \del{b_n} &
 \end{array}$$

Jetzt betrachtet man die Prozedur: Alle NBV-Nullen eingetragen denken
 \rightarrow die BV sind durch Δ Auflösung gewonnen worden.

Eindeutige Lösung: $x_{tn} = a_t^*, \dots, x_{mn} = a_m^*$

\Rightarrow In *beiden* Fällen hat man "aus *jeder* der $n + m - 1$ Gleichungen des " x_{ij} -Schemas" " je eine BV bestimmt $\rightarrow n + m - 1$ BV.

8 Spieltheorie (Matrixspiele)

- Gegeben sei eine *Auszahlungsmatrix*

$$A = (a_{ij}) \quad a_{ij} \text{ nicht negativ oder negativ (KEINE Beschränkung!)}$$

zwei Spieler: R, S

R wählt (geheim) Zeile i ,

S wählt (geheim) Spalte j ;

		(Typ: $m \times n$)		
$R \backslash S$		St.	P.	Sch.
	St.	0	-1	1
	P.	1	0	-1
	Sch.	-1	1	0

Bekanntgabe der Aktionen (also: $R : i, S : j$)

Es sollten jetzt *mehrfach* solche Spielrunden gespielt werden.

- Annahme:* Beide Spieler spielen nach einer "zufällig" gemischten Strategie:

Ⓐ wählt in jeder Runde Zeile i mit *Wahrscheinlichkeit* x_i , wobei

$$x_1 + \dots + x_m = 1$$

(vollständige Aufspaltung des Ereignisfeldes)

$$0 \leq x_i \leq 1$$

Ⓑ wählt mit jeder Runde Spalte j mit *Wahrscheinlichkeit* y_j , wobei

$$y_1 + \dots + y_n = 1,$$

$$0 \leq y_j \leq 1$$

- Erwartungswert der Auszahlungen von S an R pro Runde* (mittlerer Gewinn von R pro Runde):

$$\sum_{i,j} a_{ij} x_i y_j = x_1 a_{11} y_1 + x_1 a_{12} y_2 + \dots + x_m a_{mn} y_n$$

Ziel von R : Maximum der Auszahlung durch geschickte Wahl seiner Strategie $x = (x_1, \dots, x_m)^T$ zu sichern.

Ziel von S : Minimum der Auszahlung

$$y; \sum y_i = 1, y \geq 0$$

Die *Auszahlung* hängt aber von *beiden* Strategien (Spielern) ab \rightarrow typische *Konfliktsituation*.

- Ⓐ verhält sich *konservativ*. Er denkt sich, dass dem Spieler S seine Strategie bekannt ist, sodass, wenn er x^0 spielt, S ein y wählt, sodass die *Auszahlung*

$$\sum_{ij} a_{ij} x_i^0 y_j$$

klein wird.

Da

$$\begin{aligned}\sum_{i,j} x_i^0 y_j a_{ij} &= \sum_j y_j \sum_i a_{ij} x_i^0 \geq \underbrace{\sum_j y_j}_{=1} \min_j \sum_i x_i^0 a_{ij} \\ &= \min_j \sum_i x_i^0 a_{ij},\end{aligned}$$

folgt

$$\min_y \sum_{ij} a_{ij} x_i^0 y_j \geq \min_j \sum_i x_i^0 a_{ij} = \sum_i x_i^0 a_{ij_0}.$$

Die Auszahlung für $(y_{j_0} = 1, y_j = 0 \text{ sonst})$ ist gerade

$$\sum_i x_i^0 a_{ij(x^0)},$$

folglich ist dieser Wert das

$$(+)\min_y \sum_{ij} a_{ij} x_i^0 y_i = \min_j \sum_i x_i^0 a_{ij}$$

$$\min_y \sum_{ij} a_{ij} x_i^0 y_i = \sum_i x_i^0 a_{ij(x^0)}$$

auf diesen Wert kann S die Auszahlung drücken.

- R muss also seine Strategie x so wählen, dass dieses Minimum möglichst groß ist:

$$\uparrow (\bullet) \quad \min_j \sum_i x_i a_{ij} = \sum_i x_i a_{ij(x)} = \max_{x \geq 0, \sum_{i=1}^m x_i = 1} \Rightarrow x^0$$

Es wird dann R folgende mittlere Auszahlung erreichen:

$$v_1 = \max_x \min_j \sum_i x_i a_{ij}$$

x^0 heißt *optimale Strategie* : R ist bei x^0 eine mittlere Auszahlung sicher, ungeachtet der Spielweise von S . Bei allen anderen Strategien muss R bei geeigneten Gegenspiel von S mit einer kleineren Auszahlung rechnen.

Berechnung von x^0 :

$$\begin{aligned}v_1 &= \max_{\substack{x \geq 0 \\ \sum x_i = 1}} \min_{j=1, \dots, n} \sum_i x_i a_{ij} \\ &= \max_{\substack{x \geq 0 \\ \sum x_i = 1}} \max_{\substack{L \\ L \leq \sum_i x_i a_{ij} \\ j=1, \dots, n}} L &= \max_{\substack{x \geq 0, \sum_i x_i a_{ij} \geq L \\ \sum_i x_i = 1, j=1, \dots, n}} L\end{aligned}$$

L kann ≤ 0 sein \Rightarrow wir setzen

$$-L = x_{m+1} - x_{m+2}$$

mit $x_{m+1} \geq 0, x_{m+2} \geq 0$

⇒ Die Maximierungsaufgabe hat die Gestalt:

$$\begin{array}{l} (*) \\ (LOP(2)) \end{array} \left[\begin{array}{l} \sum_{i=1}^m x_i a_{ij} + x_{m+1} - x_{m+2} \geq 0, j = 1, \dots, n \\ \sum_{i=1}^m x_i \geq 1, -\sum_{i=1}^m x_i \geq -1 \\ x_i \geq 0; i = 1, \dots, m+2; \\ x_{m+1} - x_{m+2} = -L = \text{Min!} \end{array} \right.$$

Falls *Optimallösung* vorhanden, liefert sie mit $(\overset{\bullet}{x}_1^0, \dots, \overset{\bullet}{x}_m^0)$ die *optimale Strategie* für R und mit

$$v_1 = -\overset{\bullet}{x}_{m+1}^0 + \overset{\bullet}{x}_{m+2}^0$$

den mittleren Auszahlungswert.

23.06.2021

Ⓢ verhält sich *konservativ*. Er rechnet damit, dass seine *Strategie* y^0 dem Spieler R bekannt ist.

R wird vermutlich so spielen, dass die Auszahlung

$$\sum_{i,j} a_{ij} x_i y_j^0$$

maximal wird, und es gilt analog zu oben

$$\text{Max}_x \sum_{i,j} x_i y_j^0 a_{ij} = \text{Max}_i \sum_j y_j^0 a_{ij}$$

S muss also, da er an einer *kleinen* Auszahlung interessiert ist, sein Strategie y so wählen:

$\overset{\bullet}{y}^0$, dass obiger *Maximalwert* möglichst *klein* wird:

$$\begin{array}{l} \text{Max}_i \sum y_j a_{ij} = \text{Min!} \\ y \geq 0 \\ \sum_{j=1}^n y_j = 1 \end{array}$$

Die *mittlere Auszahlung* des Spieles beträgt dann

$$v_2 = \text{Min}_y \text{Max}_i \sum_j y_j a_{ij},$$

$\overset{\bullet}{y}^0$ ist für S die *optimale Strategie*, denn S kann eine *mittlere Auszahlung* v_2 an R bei $\overset{\bullet}{y}^0$ erwarten, ohne Rücksicht auf das Gegenspiel von R .

Weicht er (S) von $\overset{\bullet}{y}^0$ ab, so muss er bei *geeigneten* Gegenspiel von R mit einer größeren Auszahlung an R rechnen.

Zur Berechnung von $\overset{\bullet}{y}^0$ wird folgendes $(LOP(2))$ aufgestellt:

$$\begin{aligned}
v_2 &= \text{Min}_{\substack{y \geq 0 \\ \sum y_i = 1}} \quad \text{Max}_{i=1, \dots, m} \quad \sum_j^n y_j a_{ij} \\
&\quad \quad \quad \downarrow \\
&= \text{Min}_y \quad \text{Min}_{\substack{K \\ K \geq \sum_j^n y_j a_{ij} \\ i=1, \dots, m}} K \quad = \text{Min}_{\substack{y \geq 0, \sum_j^n y_j a_{ij} \leq K \\ \sum_j^n x_i = 1, i=1, \dots, m}} K
\end{aligned}$$

Da K beliebige Vorzeichen hat, setzen wir

$$\boxed{-K = y_{n+1} - y_{n+2},}$$

$$y_{n+1} \geq 0, y_{n+2} \geq 0,$$

also gilt für das *Minimalproblem*:

$$\begin{aligned}
(**) \quad (LOP(2)) \quad \left[\begin{array}{l} \sum_{j=1}^n a_{ij} y_j + y_{n+1} - y_{n+2} \leq 0 \quad (i = 1, \dots, m) \\ \sum_{j=1}^n y_j \leq 1, -\sum_{j=1}^n y_j \leq -1, y_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n+2) \\ y_{n+1} - y_{n+2} = -K = \text{Max!} \end{array} \right.
\end{aligned}$$

Falls *Optimallösung* vorhanden, ist mit $(\overset{\bullet}{y}_1^0, \dots, \overset{\bullet}{y}_n^0)$ die *optimale Strategie* für S und mit

$$\boxed{v_2 = -\overset{\bullet}{y}_{n+1}^0 + \overset{\bullet}{y}_{n+2}^0}$$

die mittlere Auszahlung an R gegeben.

8.0.1 Bemerkungen

- 1) $(*)^D = (**)$
- 2) Da *beide* Probleme *zulässige* Lösungen besitzen (jedes x mit $\sum x_i = 1$, jedes y mit $\sum y_j = 1$ ist zulässig ($x_{m+1}, x_{m+2}, y_{n+1}, y_{n+2}$ entsprechend gewählt)), besitzt nach der Dualitätstheorie $(*)$ ein Minimum $-L = -v_1$, $(**)$ ein Maximum $-K = -v_2$ und beide sind gleich:

$$\boxed{v_1 = v_2 = v}$$

v heißt *Wert des Spieles*.

$\overset{\bullet}{x}^0, \overset{\bullet}{y}^0$ heißen *Lösung des Matrixspieles*.

- 3) Es gilt der *Minimaxsatz (von Neumann)*

$$\boxed{v = \text{Max}_x \left(\underbrace{\text{Min}_y \sum_i^m \sum_j^n x_i y_j a_{ij}}_{v_1 (= \text{Seite 73})} \right) = \text{Min}_y \left(\underbrace{\text{Max}_x \sum_i^m \sum_j^n x_i y_j a_{ij}}_{v_2} \right)}$$

mit $x \geq 0, y \geq 0, \sum_{i=1}^m x_i = 1, \sum_{j=1}^n y_j = 1$, (in Bereich der gem. Strat.)

4) Durch Angabe der beiden *optimalen Strategien* x^0, y^0 und dem *Wert* des Spieles:
 v ist das Spiel "vollständig gelöst" in folgenden Sinne:

- a) Befolgt $R : \overset{\bullet}{x}^0$ -er kann bei *jedem* Gegenspiel von S *mindestens* die *Auszahlung* v erreichen:

$$\sum_i \sum_j \overset{\bullet}{x}_i^0 a_{ij} y_j \geq \boxed{\text{Min}_y \sum_i \overset{\bullet}{x}_i^0 a_{ij} y_j \underset{(**)}{=} \text{Min}_j \sum_i \overset{\bullet}{x}_i^0 a_{ij}} = v$$

- b) Befolgt R *nicht* $\overset{\bullet}{x}^0$, so kann S die Auszahlung eventuell *unter* v drücken.
c) Selbst wenn R weiß, dass S *konservativ* (spielt) (also $\overset{\bullet}{y}^0$), so kann R trotz dieser Information die Auszahlung *nicht größer als* v machen:

$$\sum_i \sum_j x_i \overset{\bullet}{y}_j^0 a_{ij} \leq \boxed{\text{Max}_x \sum_i \sum_j x_i \overset{\bullet}{y}_j^0 a_{ij} \underset{(**)}{=} \text{Max}_i \sum_j \overset{\bullet}{y}_j^0 a_{ij}} = v.$$

- d) Bei diesem *vollständigen Einblick* ist es für beide Spieler am *günstigsten*, ihre *optimalen Strategien* zu wählen: $\overset{\bullet}{x}^0, \overset{\bullet}{y}^0$. Es folgt für diese Wahl:

$$\left. \begin{aligned} v &= \text{Min}_y \sum_i \sum_j \overset{\bullet}{x}_i^0 y_j a_{ij} \leq \sum_i \sum_j \overset{\bullet}{x}_i^0 \overset{\bullet}{y}_j^0 a_{ij} \\ v &= \text{Max}_x \sum_i \sum_j x_i \overset{\bullet}{y}_j^0 a_{ij} \geq \sum_i \sum_j \overset{\bullet}{x}_i^0 \overset{\bullet}{y}_j^0 a_{ij} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{v = \sum_i \sum_j \overset{\bullet}{x}_i^0 a_{ij} \overset{\bullet}{y}_j^0}$$

9 Das Karmarkar-Verfahren

- Simplexalgorithmus:
Hat sich in Praxis sehr bewährt, ist aber "ein im schlechtesten Fall schlechtes Verfahren" in dem Sinne, dass es Beispiele gibt, in welchen das Simplexverfahren sämtliche Ecken von \mathcal{B} durchläuft.
aber: "im Mittel ein gutes Verfahren".
- Karmarkar-Verfahren (1984):
"Ein im schlechtesten Fall gutes Verfahren", von dem aber zumindest der Autor behauptete, dass es bei Problemen aus der Praxis wesentlich schneller als das Simplexverfahren sei. Diese Behauptung scheint noch nicht bewiesen zu sein.
aber: Anzeichen dafür, dass geeignete Implementationen des Karmarkar-Verfahrens gerade für *große* lineare Optimierungsaufgaben konkurrenzfähig.⁹

9.1 Das Karmarkar-Verfahren

Motivation:

Gegeben sei das lineare Programm

$$(P) \quad \begin{array}{l} c^T x \rightarrow \min \\ \mathcal{B} := \begin{cases} x \in \mathbb{R}^n \\ \begin{pmatrix} A \\ e^T \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 0 \\ n \end{pmatrix} \\ x \geq 0 \end{cases} \end{array}$$

Voraussetzungen:

$c \in \mathbb{R}^n$, $A : (m, n) - \text{Matrix}$ mit $n \geq 2$, $e := (1, \dots, 1)^T \in \mathbb{R}^n$.

Zusätzlich wird vorausgesetzt, dass

$$(V) : \quad \begin{cases} \text{Rang}(A) = m, \\ \min(P) = 0 \end{cases} \quad Ae = 0,$$

Ist (V) erfüllt: "(P) ist in Karmarkar-Normalform" gegeben.

- Ein (allgemeines) lineares Programm kann auf Karmarkar-Normalform *zurückgeführt* werden (\downarrow S.82).
Das von Karmarkar entwickelte Verfahren lässt sich nun sehr einfach angeben und lautet folgendermaßen:

9.1.1 Algorithmus

- **Input:** Gegeben sei das **lineare Programm (P)**, **Voraussetzung (V)** sei erfüllt.
Sei $\alpha \in (0, 1)$, $r := \sqrt{n/(n-1)}$ und $x^0 := e$.

⁹Neue Entwicklung auf dem Gebiet der linearen Optimierung
Zimmermann (1988), Goldfarb / Todd (1989)

- Für $k = 0, 1, \dots$:

1⁰ Falls $c^T x^k = 0 \Rightarrow STOP$.

Andernfalls: Gehe zu 2⁰. **Output:** x^k (ist Lösung von (P)).

2⁰ Setze

$$D_k := \text{diag}(x_1^k, \dots, x_n^k)$$

$n \times n$ Diagonalmatrix, die die Komponenten von x^k in der Diagonalen enthält

$$B_k := \begin{pmatrix} AD_k \\ e^T \end{pmatrix}.$$

Gehe zu 3⁰

3⁰ Berechne

$$\begin{aligned} p^k &:= \left[I - B_k^T (B_k B_k^T)^{-1} B_k \right] D_k c, \\ y^{k+1} &:= e - \alpha r \frac{p^k}{\|p^k\|_2}, \\ x^{k+1} &:= \frac{n}{(x^k)^T y^{k+1}} D_k y^{k+1}, \end{aligned}$$

Setze $x^k := x^{k+1}$ gehe zu 1⁰.

Die Durchführbarkeit des Karmarkar-Verfahrens wird in Lemma 9.3 (S.82) bewiesen, grob gesagt bedeutet das den Nachweis, dass nicht durch Null dividiert wird.

9.1.2 Motivation des Verfahrens

Annahme:

$x \in \mathcal{B}$ mit $x > 0$ sei eine aktuelle Näherung, die *keine* Lösung ist $\Rightarrow c^T x > 0$.

(Wie im Allgemeinen angegeben:)

$$D := \text{diag}(x_1, \dots, x_n)$$

($n \times n$ - Diagonalmatrix, die die Komponenten von x in der Diagonalen enthält).

Mit

$$\mathcal{B}^0 := \{z \in \mathbb{R}^n : e^T z = n, z \geq 0\}$$

ist das Ausgangsproblem gegeben durch

$$(P) \quad c^T z \rightarrow \min_{z \in \text{Kern}(A) \cap \mathcal{B}^0}$$

Definiert man die *projektive Transformation*

$$T : \mathcal{B}^0 \rightarrow \mathcal{B}^0$$

durch

$$\begin{aligned} y = T(z) &:= \frac{n}{e^T D^{-1} z} D^{-1} z \quad (\sim) \\ \Rightarrow T(x) = e \quad T(x) &= \frac{n}{\underbrace{e^T \underbrace{D^{-1} x}_{=e}}_{=n}} = \frac{n}{n} e \end{aligned}$$

d.h., die aktuelle Näherung x wird in den Schwerpunkt e von \mathcal{B}^0 abgebildet. $T : x \rightarrow e$
 Ferner bildet T \mathcal{B}^0 *eindeutig auf sich* ab.

Die *inverse Transformation* $T^{-1} : \mathcal{B}^0 \rightarrow \mathcal{B}^0$ ist durch

$$z = T^{-1}(y) = \frac{n}{x^T y} Dy \quad (\bullet)$$

gegeben.

Schreibt man das Ausgangsproblem (P) in der transformierten Variablen y (d.h., man ersetzt z durch $T^{-1}(y)$), so erhält man das äquivalente *lineare Quotienten-Optimierungsproblem*:

$$(P) : z \in \text{Kern}(A) \iff Az = 0$$

$$(\cdot) : A \left(\frac{n}{x^T y} Dy \right) = 0 \leftrightarrow AD(y) = 0$$

$$(\text{da } D = D^T) \quad n \frac{(Dc)^T y}{x^T y} \rightarrow \min_{y \in \text{Kern}(AD) \cap \mathcal{B}^0}.$$

$$\uparrow (\sim) : e^T y = n$$

Wegen Voraussetzung $\text{Min}(P) = 0$, ist dieses Problem wieder äquivalent zu

$$(P_T) \quad (Dc)^T y \rightarrow \min_{y \in \text{Kern}(AD) \cap \mathcal{B}^0}.$$

30.06.2021

also:

$$x^* \text{ ist Lösung von } (P) \iff y^* := T(x^*) \text{ ist Lösung von } (P_T)$$

Nun ist das transformierte Problem (P_T) genauso schwer oder leicht zu lösen wie das Ausgangsproblem (P) .

Auf den ersten Blick hat es lediglich den Vorteil, dass der *Schwerpunkt e von \mathcal{B}^0 zulässig* für (P_T) ist.

Entscheidende Idee von Karmarkar:

(P_T) als Relaxation einer geschlossen lösbaren, nichtlinear restringierten Optimierungsaufgabe auffassen!

\curvearrowright Grundlage hierfür

9.2 Lemma

Sei

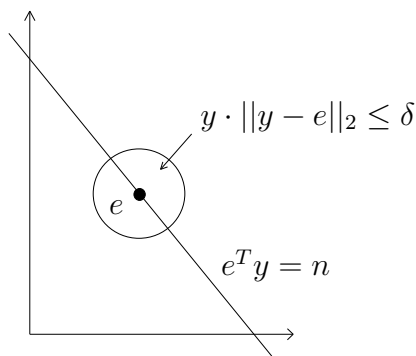
$$\mathcal{B}^0 := \{y \in \mathbb{R}^n : e^T y = n, y \geq 0\},$$

$$K(e, \delta) := \{y \in \mathbb{R}^n : e^T y = n, \|y - e\|_2 \leq \delta\}.$$

\Rightarrow Mit $r := \sqrt{n/(n-1)}$, $R := \sqrt{n(n-1)}$ und $\alpha \in (0, 1)$ ist

$$(\cdot) \quad K(e, r) \subset \mathcal{B}^0 \subset K(e; R)$$

$$(\dots) \quad K(e, \alpha r) \subset \{y \in \mathbb{R}^n : e^T y = n, y > 0\}.$$



Beweis: Übungsaufgabe

Geometrisch:

$K(e; r)$ ist *Inkugel* und $K(e, R)$ *Umkugel* zu Elementen $y \geq 0$ in der Hyperebene

$$H := \{y \in \mathbb{R}^n : e^T y = n\}.$$

Wegen $K(e; \alpha r) \subset \mathcal{B}^0$ ist das lineare Optimierungsproblem (P_T) eine Relaxation der Optimierungsaufgabe

$$(P_T^\alpha) \quad (Dc)^T y \rightarrow \underset{y \in \text{Kern}(AD) \cap K(e; \alpha r)}{\text{Min}}$$

Die Aufgabe (P_T^α) besitzt, wie im folgenden Lemma 9.3 bewiesen wird, eine eindeutige, geschlossen angebbare Lösung y^+ .

Dies soll hier schon *geometrisch motiviert* werden.

Ersetzt man y durch $e - u$, so ist erkennbar:

$$\left. \begin{array}{l} y^+ \text{ ist Lösung} \\ \text{von } (P_T^\alpha) \end{array} \right\} \iff u^+ := e - y^+ \text{ ist}$$

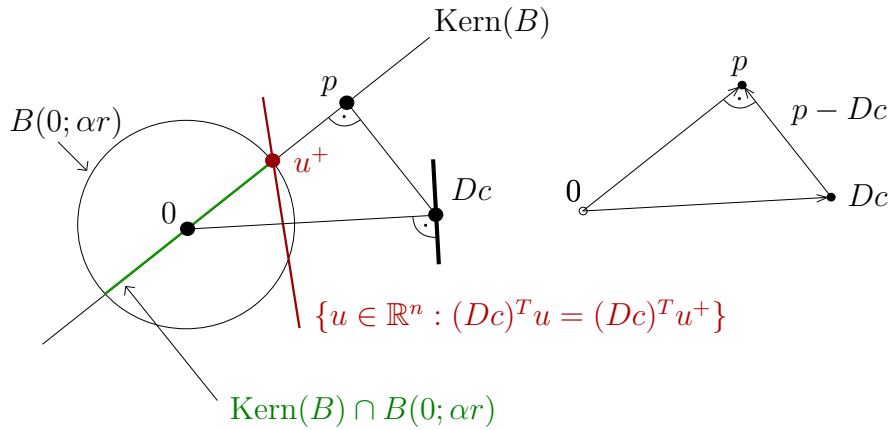
Lösung von

$$(*) \quad (Dc)^T u \rightarrow \underset{u \in \text{Kern}(B) \cap B(0, \alpha r)}{\text{Max}}$$

wobei

$$B := \begin{pmatrix} AD \\ e^T \end{pmatrix}, B(0, \alpha r) := \{u \in \mathbb{R}^n : \|u\|_2 \leq \alpha r\}.$$

\curvearrowright Aufgabe $(*)$ besteht also darin, eine *lineare*, reellwertige Funktion auf dem Schnitt des *linearen Teilraumes* $\text{Kern}(B)$ mit der euklidischen *Kugel* $B(0; \alpha r)$ zu maximieren. In folgender Abb. wird verdeutlicht, dass man die *Lösung* u^+ von $(*)$ in *zwei* Schritten erreicht:



- 1) Man gewinnt zunächst den Vektor p , indem man Dc auf $Kern(B)$ orthogonal projiziert.
- 2) Anschließend *multipliziert* man p so mit einem *positiven Faktor*, dass der resultierende Vektor auf dem Rand von $B(0; \alpha r)$ liegt, d.h., man berechnet

$$u^+ := \alpha r p / \|p\|_2 \hookrightarrow \|u^+\| = \alpha r$$

Daher wird man erwarten, dass $y^+ := e - u^+$ eine Lösung von (P_T^α) ist.

vgl. Schritt 3⁰ Berechnung von y^{k+1} im Algorithmus.

Wegen $y^+ \in Kern(AD) \cap K(e, \alpha r)$ und Lemma 9.2 ist $y^+ \in Kern(AD) \cap \mathcal{B}^0$ und $y^+ > 0$.

Durch *Rücktransformation* erhält man die neue aktuelle Näherung

$$x^+ := T^{-1}(y^+).$$

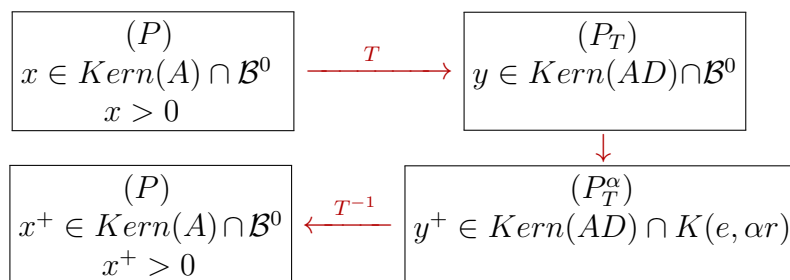
Diese ist zulässig für das Ausgangsproblem (P) , d.h., es ist

$$\begin{array}{l} x^+ \in Kern(A) \cap \mathcal{B}^0, \\ x^+ > 0. \end{array}$$

ferner ist

Anders als beim Simplexverfahren: Näherungen beim Karmarkar-Verfahren sind *positive Vektoren*, also aus dem *Inneren* (\leftarrow Suche von *innen* her nach jender Ecke, welche optimal.) des nichtnegativen Orthanten im \mathbb{R}^n .

Folgende Abb. stellt die *Schritte des Karmarkar-Verfahrens*, von einer *aktuellen, zulässigen Näherung* $x \in M$ mit $x > 0$ zur *nächsten Näherung* $x^+ \in M$ mit $x^+ > 0$ zu gelangen, dar:



Folgendes Lemma zeigt die *Durchführbarkeit* des Karmarkar-Verfahrens.

05.07.2021

9.3 Lemma

Gegeben sei das lineare Programm (P) in Karmarkar-Normalform, die Voraussetzung (V) sei erfüllt.

Sei $x \in \mathcal{B}$ mit $x > 0$ eine aktuelle Näherung und $c^T x > 0$, also x keine Lösung von (P) .

Man setze

$$D := \text{diag}(x_1, \dots, x_n), \quad B := \begin{pmatrix} AD \\ e^T \end{pmatrix}$$

Dann gilt

1. Es ist $\text{Rang}(B) = m + 1$ und daher BB^T nichtsingulär. ($\leadsto \exists (BB^+)^{-1}$)
2. Es ist $p := [I - B^T(BB^T)^{-1}B] Dc \neq 0$.
(\uparrow alg. Schritt 3 \leadsto Division durch $\|p\|_2$ möglich!)
3. $y^+ := e - \alpha + p/\|p\|_2$ ist die eindeutige Lösung von

$$\begin{array}{l} \text{Minimiere} \\ (Dc)^T y \\ \text{unter der Nebenbedingung} \\ y \in \text{Kern}(AD) \cap K(e, \alpha r), \end{array}$$

wobei $\alpha \in (0, 1), r := \sqrt{n/(n-1)}$ und

$$K(e; \alpha r) := \{y \in \mathbb{R}^n : e^T y = n, \|y - e\|_2 \leq \alpha r\}$$

4. Es ist

$$(Dc)^T y^+ \leq [1 - \alpha/(n-1)] c^T x.$$

Beweis: Werner, J.: Numerische Mathematik 2, S.132, Lemma 4.2

Bemerkung: Die Hauptarbeit in jedem Schritt des Karmarkar-Verfahrens besteht in der Berechnung von

$$p := [I - B^T(BB^T)^{-1}B] Dc$$

Da $p \in \text{Kern}(B)^{10}$ steht, ist p die orthogonale Projektion von Dc auf $\text{Kern}(B)$.

9.4 Zurückführung eines linearen Programms auf Karmarkar-Normalform

Ausgangsproblem

$$\begin{array}{ll} (P_0) & c_0^T u \rightarrow \text{Min!}, \text{ wobei} \\ & M_0 := \{u \in \mathbb{R}^l : u \geq 0, A_0 u \geq b_0\} \end{array}$$

Ziel: Zurückführung von (P_0) auf *Karmarkar-Normalform*!

¹⁰also zeigen: $y^T \overbrace{(Dc - B^T(BB^T)^{-1}BDc - Dc)}^{y^T(p-Dc)=0} = -y^T B^T(BB^T)^{-1}BDc = 0$ $\forall y \text{ mit } By=0$

9.5 Satz

Mit $A_0 \in \mathbb{R}^{k \times l}$, $b_0 \in \mathbb{R}^k$, $c_0 \in \mathbb{R}^l$ sei das lineare Programm

$$(P_0) \quad \begin{array}{l} c_0^T u \rightarrow \text{Min}, \\ u \in M_0, \\ M_0 := \{u \in \mathbb{R}^l : u \geq 0, A_0 u \geq b_0\} \end{array}$$

gegeben.

Die Menge der *optimalen Lösungen* von (P_0) sei *nichtleer* und *beschränkt*.

Dann ist

$$\{u \in \mathbb{R}^l : u \geq 0, A_0 u \geq 0, c_0^T u \leq 0\} = \{0\}$$

Beweis: Angenommen, $u \in \mathbb{R}^l$ sei ein vom Nullvektor verschiedener, nichtnegativer Vektor mit

$$A_0 u \geq 0 \text{ und } c_0^T u \leq 0.$$

- Sei $u_0 \in M_0$ eine opt. Lösung von (P_0) .

$$\Rightarrow u_0 + tu \in M_0 \quad \forall t \geq 0$$

$$\begin{aligned} \underbrace{u_0}_{\geq 0} + \underbrace{t}_{\geq 0} \underbrace{u}_{\geq 0} &\geq 0, A_0(u_0 + tu) = A_0 u_0 + A_0 tu \\ &= \underbrace{t}_{\geq 0} \underbrace{A_0 u}_{\geq 0} + A_0 u_0 \\ &\geq A_0 u_0 \geq b_0 \end{aligned}$$

$$\hookrightarrow u_0 + tu \in M_0$$

- Wäre $c_0^T u < 0 \Rightarrow \inf(P_0) = -\infty$, Widerspruch

$$\nwarrow_{u_0 \text{ optimale Lösung von } (P_0)} \Rightarrow \begin{cases} c_0^T u_0 & \leq c_0^T (\overbrace{u_0 + tu}^{\in M_0}) \\ & = c_0^T u_0 + t \underbrace{c_0^T u}_{\neq 0} \end{cases}$$

- Wäre $c_0^T u = 0 \Rightarrow u_0 + t \overset{u \neq 0}{\downarrow} u$ Lösung von $(P_0) \forall t \geq 0$.
 \Rightarrow Widerspruch zur vorausgesetzten Beschränktheit der Lösungsmenge von (P_0) .
 \hookrightarrow Widerspruch $\hookrightarrow \{u \in \mathbb{R}^l : u \geq 0, A_0 u \geq 0, c_0^T u \leq 0\} = \{0\}$.

Im Folgenden sei wieder e der Vektor geeigneter Länge, dessen Komponenten alle gleich 1 sind.

9.6 Satz

Gegeben seien das lineare Optimierungsproblem

$$(P_0) \quad \begin{array}{l} c_0^T u \rightarrow \text{Min}, \\ u \in M_0, \\ M_0 := \{u \in \mathbb{R}^l : u \geq 0, A_0 u \geq b_0\} \end{array}$$

und das hierzu *duale* lineare Problem

$$(D_0) \quad \begin{array}{l} b_0^T v \rightarrow \text{Max}, \\ v \in N_0, \\ \text{wobei} \\ N_0 := \{v \in \mathbb{R}^k : v \geq 0, A_0^T v \leq c_0\} \end{array}$$

Voraussetzungen: $A_0 : (k \times l)$ -Matrix
 $b_0 \in \mathbb{R}^k, c_0 \in \mathbb{R}^l$.

(V1) Es ist $b_0 \neq 0$ oder $c_0 \neq 0$.

(V2) Die Menge der (optimalen) Lösungen von (P_0) ist *nichtleer* und *beschränkt*

(V3) $\exists \bar{u} \in \mathbb{R}^l$ mit $\bar{u} \geq 0$ und $A_0 \bar{u} > b_0$. (**Regularitätsvoraussetzung!**)

Man setze $m := k + l - 1, n := 2m$ und definiere

$$B := \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} & l & k & k & l \\ & k & & & \\ & l & & & \\ (m \text{ Zeilen}) & 1 & & & \end{array} \begin{pmatrix} A_0 & -I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_0^T & I \\ c_0^T & 0^T & -b_0^T & 0^T \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times 2(m-1)}, \end{array} \quad (2(l+k)=2(m-1) \text{ Spalten})$$

$$d := \begin{array}{c} k \\ l \\ 1 \end{array} \begin{pmatrix} b_0 \\ c_0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m,$$

und bilde das lineare Programm

$$(P) \quad \begin{array}{l} \text{Minimiere} \quad \begin{array}{c} 2(m-1) \\ 1 \\ 1 \end{array} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 1 \end{array} \begin{pmatrix} p \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \\ \text{auf} \\ \mathcal{B} := \left\{ \begin{pmatrix} p \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n : \begin{array}{c} 2(m-1) \\ m \\ 1 \end{array} \begin{pmatrix} B & -d \\ e^T & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 1 \end{array} \begin{pmatrix} p \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \begin{array}{c} 2(m-1) \\ 1 \\ 1 \end{array} = \begin{pmatrix} 0 \\ n \end{pmatrix} \begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array} \right. \\ \left. \begin{pmatrix} p \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \geq 0 \right\}. \end{array}$$

Dann gilt:

1. Das lineare Optimierungsproblem (P) besitzt *Karmarkar-Normalform*.

2. (P) ist im folgenden Sinne äquivalent zu (P_0) und (D_0) :

$$\begin{array}{ccc} u^*, v^* & \rightarrow & x^* \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ (P_0) & (D_0) & (P) \end{array}$$

Sei $u^* \in M_0$ eine Lösung von (P_0) und $v^* \in N_0$ eine Lösung von (D_0) .

$$\Rightarrow x^* := \frac{n}{e^T w^* + 1} \begin{pmatrix} w^* \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{B}$$

mit

$$w^* := \begin{pmatrix} l \\ k \\ k \\ l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^* \\ A_0 u^* - b_0 \\ v^* \\ c_0 - A_0^T v^* \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2(m-1)}$$

ist Lösung von (P) .

Umgekehrt: Ist $x^* \in \mathcal{B}$ Lösung von (P) und $x^{*T} = \begin{pmatrix} 2(l+k) & 1 & 1 \\ p^{*T} & \alpha^* & \beta^* \end{pmatrix}$, so ist $\beta^* = 0$ und $\alpha^* > 0$.

Durch $w^* := (1/\alpha^*)p^*$ ist eine Lösung von (Def. $B \rightarrow$) $Bw = d, w \geq 0$ gegeben.

Lösungen u^* von (P_0) und v^* von (D_0) erhält man aus

$$w^{*T} = (u^{*T}, y^{*T}, v^{*T}, z^{*T}).$$

$$\begin{pmatrix} x^* \\ \uparrow \\ (P) \end{pmatrix} \rightarrow p^*, \alpha^*, \beta^* \rightarrow w^* \rightarrow \begin{pmatrix} u^* \\ \uparrow \\ (P_0) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v^* \\ \uparrow \\ (D_0) \end{pmatrix}$$

12.07.2021

Beweis:

Abkürzung: $A := \begin{pmatrix} 2(n-1) & 1 & 1 \\ B & -d & d - Be \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

① zu zeigen:

$$\begin{cases} (P) \text{ in Karmarkar-Normalform:} \\ \text{Rang}(A) = m, Ae = 0 \text{ und } \text{Min}(P) = 0 \end{cases}$$

- Leicht zu sehen: $\text{Kern}(B^T) = \{0\}$ falls nicht $b_0 = 0$ und

$$\text{Rang}(B) = m \quad c_0 = 0$$

↑

durch Voraussetzung (V1) ausgeschlossen!

$$\Rightarrow \text{Rang}(A) = \text{Rang}(B) = m. \quad (\cdot)$$

- Weiter ist

$$A \overset{\in \mathbb{R}^m}{e} = B \overset{\in \mathbb{R}^{2(m-1)}}{e} + (-d) \cdot 1 + (d - B \overset{\in \mathbb{R}^{2(m-1)}}{e}) \cdot 1 = 0 \quad (\cdot)$$

(e ist Vektor "geigneter Länge", dessen Kompon. alle = 1).

$\text{min}(P) = 0$ wird in ② mit gezeigt!

(2.a)

- Voraussetzung $(V2) \Rightarrow (P_0)$ besitzt Lösung $u^* \in M_0$
 $\xrightarrow[\text{Dual.satz}]{\text{starker}}$ Das duale Problem (D_0) besitzt Lösungen $v^* \in N_0$ und

$$c_0^T u^* = b_0^T v^*$$

Definieren:

$$x^* := \frac{n}{e^T w^* + 1} \begin{pmatrix} w^* \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{mit } w^* := \begin{pmatrix} u^* \\ A_0 u^* - b_0 \\ v^* \\ c_0 - A_0^T v^* \end{pmatrix}$$

- $\Rightarrow Bw^* = d, w^* \geq 0$ (einsetzen) Def. von B
- $\Rightarrow x^*$ zulässig für (P) mit Zielfunktionswert 0 (\uparrow Zielfkt. in $(P) \geq 0$)
- $\Rightarrow x^*$ Lösung von (P) , $\min(P) = 0$.

(2.b)

- Sei $x^{*T} = (p^{*T}, \alpha^*, \beta^*)$ Lösung von $(P) \xrightarrow[\min(P)=0]{} \beta^* = 0$
- Annahme: $\alpha^* = 0 \xrightarrow[\text{Def. } \mathcal{B}]{\beta^*, \alpha^* = 0} Bp^* = 0, e^T p^* = n, p^* \geq 0$
 $\Rightarrow Bp = 0, p \geq 0$ hätte die nichttriviale Lösung p^* .

wegen $e^T p^* = n \uparrow$

Zerlegung von $p^* \in \mathbb{R}^{2(m-1)} = \mathbb{R}^{2(k+l)} = \mathbb{R}^{l+k+k+l}$

durch $p^{*T} = (u^T, y^T, v^T, z^T)$. (≥ 0)

$$\xrightarrow[\text{von } \mathcal{B}]{\text{Definition}} A_0 u - y = 0, A_0^T v + z = 0, c_0^T u - b_0^T v = 0. \quad (\diamond)$$

$$\text{Wäre } u \neq 0 \xrightarrow[\text{Lemma 2 (?) Satz 9.5}]{\downarrow A_0 u = y \geq 0} c_0^T u > 0$$

$$\Rightarrow 0 < c_0^T u = b_0^T v \xrightarrow[A_0^T v \leq 0]{\text{Def. } \mathcal{B}(\cdot)} \sup(D_0) = +\infty$$

\Rightarrow Widerspruch zur Lösbarkeit von (D_0) .

$$\Rightarrow u = 0 \xrightarrow[A_0 y = y]{} y = 0, b_0^T v = c_0^T u = 0. (\sim)$$

(wegen (\diamond) und $u = 0$)

- zu zeigen bleibt: $v = 0$,
da sich dann auch $z = 0$ und insgesamt $p^* = 0$ ergibt.
 Annahme: $v \neq 0 \xrightarrow[\text{Voraussetzg. (V3)}]{} 0 < v^T (\underbrace{A_0 \bar{u} - b_0}_{>0}) = \underbrace{\bar{u}^T A_0^T v}_{\leq 0} - \underbrace{b_0^T v}_{=0 (\sim)} \leq 0$
 \Rightarrow Widerspruch! $\neg p^* = 0$
- Insgesamt ist die Annahme

$$\alpha^* = 0 \quad (\neg p^* \neq 0)$$

bzw.

$$\exists \text{ nichttriviale Lösung } p^* \text{ zu } Bp = 0, p \geq 0.$$

zum Widerspruch geführt worden!

- Rest der Behauptung trivial (ergibt sich aus schwachem Dualitätssatz).

Konvergenzbeweis \uparrow Werner S.135 "Numerische Mathematik 2"